

P24 – Résonance dans différents domaines de la physique

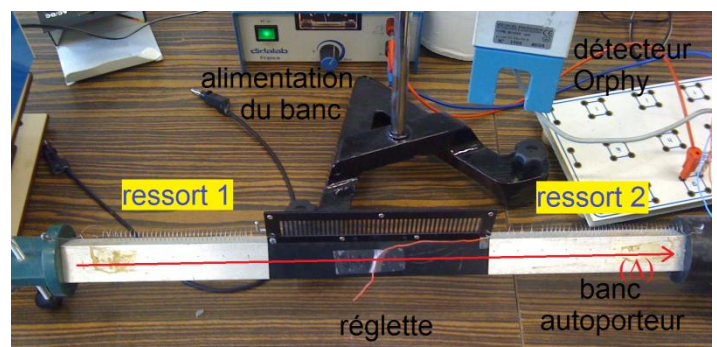
On a déjà eu l'occasion d'étudier de nombreux systèmes oscillants. On peut citer les pendules pesants, certains circuits électriques, et bien d'autres. Dans chaque cas, on étudie la réponse de ces dispositifs à une certaine excitation. Si l'excitation est une courte impulsion, il en résulte ce que l'on appelle des oscillations libres qui sont généralement amorties. Le phénomène de résonance concerne les cas où l'oscillateur est soumis à excitation extérieure. Le cas le plus simple est celui d'une excitation sinusoïdale $E=E_0 \cos(\omega t + \phi)$. Nous verrons ici que la réponse d'un système à une telle excitation va dépendre de la fréquence de celle-ci.

Ce montage mettra d'abord en évidence le phénomène de résonance en mécanique avec un ressort. Il sera étudié plus grandement en électricité avec le circuit RLC où l'on tracera la réponse impulsionnelle à proprement parler. Enfin on étudiera la résonance pour différents types d'ondes stationnaires en mécanique et en acoustique.

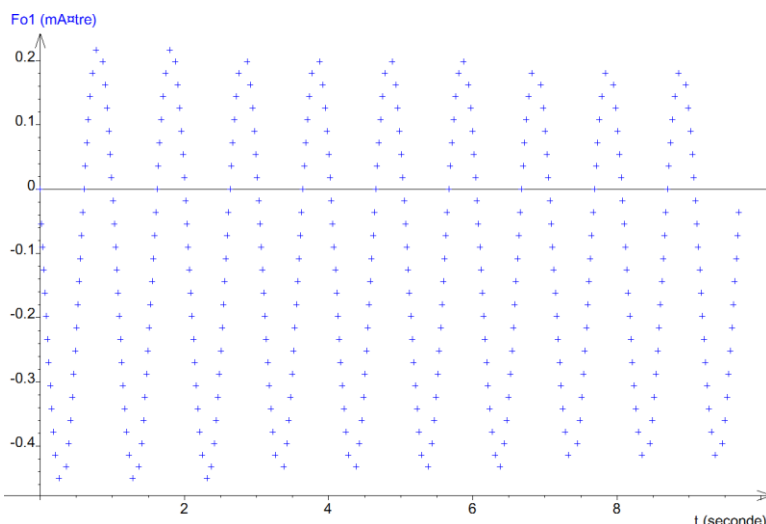
1. Mise en évidence d'une fréquence propre : résonance en mécanique avec un système à ressort

1.1. Fréquence propre de l'oscillateur

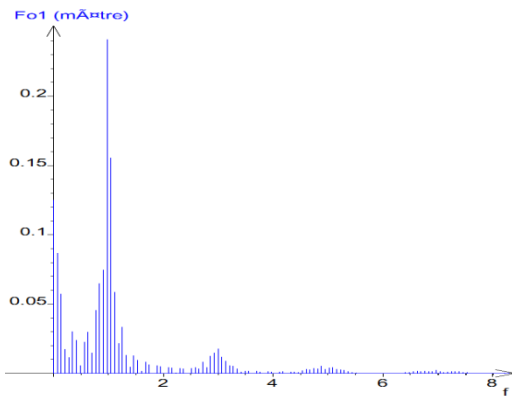
On étudie le mouvement horizontal d'une réglette reliée à deux ressorts. Ces ressorts sont fixés aux extrémités du banc guidant le système et lui permettant de se déplacer sans frottement grâce à un coussin d'air. Dans un premier temps, on déplace la réglette de sa position d'équilibre afin d'observer des oscillations libres. On étudie le mouvement à l'aide d'un capteur Orphy.



NB : Ce dernier est constitué de deux photodiodes et leurs capteurs. Le passage successif des traits de la réglette permet de mesurer sa position mais aussi éventuellement sa vitesse. Le second capteur est là pour permettre de détecter le sens du déplacement. Les mesures se font sur le logiciel Orphylab et peuvent être exportées vers Regressi (ou éventuellement Excel).



Sans que l'on ait maintenu d'excitation extérieure, le système s'est mis à osciller autour de sa position d'équilibre. On constate que les oscillations sont très peu amorties (grâce au coussin d'air réduisant les frottements). La période de ces oscillations est constante. On peut s'en rendre mieux compte en traçant la transformée de Fourier du signal sous Regressi.



On en déduit donc la fréquence des oscillations comme étant $f_0 = 1\text{Hz}$.

On appelle cette fréquence la **fréquence propre** du système.

Explication mathématique :

Principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe (Δ) du banc, x étant l'écart de la règle de sa position d'équilibre.

- force exercée par le ressort 1 de constante de raideur k : $F_1 = -kx$
- force exercée par le ressort 2 identique : $F_2 = -kx$

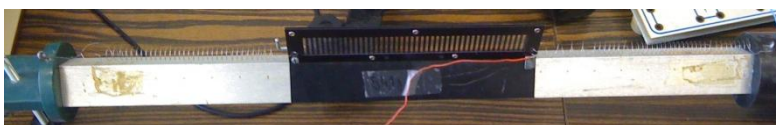
On a donc $ma = -2kx \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k}{m}x = 0$.

Il s'agit de l'équation différentielle associée à un oscillateur harmonique (car on a négligé les frottements).

On définit la pulsation propre d'un tel système comme étant $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} = 2\pi f_0$.

1.2. Résonance

On retire à présent le capteur Orphy. On souhaite étudier l'influence d'une excitation sinusoïdale sur le système. On décroche donc l'une des extrémités du ressort du banc et on la relie à un moteur pouvant exercer une tension variable sur le ressort. On fait varier la fréquence de l'excitation. Dans de telles conditions, une variation du régime entraîne un régime transitoire assez long en raison de l'absence de frottements. Pour faciliter l'étude et réduire la durée de ce régime, on rajoute deux aimants de part et d'autre de la règlette. Le déplacement de celle-ci entraîne des courants de Foucault dans le banc qui freinent le mouvement. Cette force supplémentaire a une influence minime dans le régime permanent mais facilite son établissement immédiat.



moteur impose. En augmentant progressivement la fréquence, le déphasage s'accroît et l'amplitude des oscillations aussi. Lorsque l'on atteint la fréquence de 1Hz , l'amplitude est maximale et moteur et mobile



sont en quadrature de phase. Après, aux fréquences supérieures, le mobile ralentit jusqu'à ne presque plus bouger. En effet aux hautes fréquences, le moteur bouge

trop rapidement pour que le mobile puisse réagir.

L'amplitude à 1Hz est grandement supérieure à celle du mouvement lié au moteur. Ce phénomène est appelé résonance et s'observe quand un système oscillant est soumis à une excitation à sa fréquence propre (vue dans la partie précédente).

C'est un phénomène mécanique dont on a au moins eu l'expérience une fois dans sa vie. La balançoire repose sur ce phénomène. Il s'agit d'un pendule pesant dont on fait varier la longueur. L'enfant l'utilisant fait de petits mouvements en rythme qui lui permettent d'effectuer d'amples oscillations. Il pose aussi de nombreux problèmes. Des bâtiments ou édifices construits par l'homme sont eux aussi soumis à des vibrations (vents, séismes, ...). Si ces vibrations coïncident avec une fréquence de résonance, ceci peut conduire à des oscillations destructives. On peut citer l'exemple du pont à Anger qui s'écroula en 1850 lorsqu'un groupe de militaires marchant au pas passa dessus.

Explication mathématique :

Cette fois l'élongation du premier ressort n'est plus x mais $x - a \cdot \cos(\omega t)$; $\omega = 2\pi \cdot f$ étant la pulsation des oscillations. Les deux forces entrant en jeu dans l'application de la RFD sur l'axe (Δ) sont donc :

- force exercée par le ressort 1 : $F_1 = -k x$
- force exercée par le ressort 2 : $F_2 = -k x + k a \cdot \cos(\omega t)$

On a donc
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{ka}{m} \cos(\omega t)$$

En régime permanent on a des oscillations à la fréquence d'excitation (c'est-à-dire ω). Si on travaille dans le plan complexe, cela donne $x(t) = X e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{X} e^{j\omega t}$.

Si on transpose la solution dans l'équation, cela donne :

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot x = A \cdot e^{j(\omega t)} \quad \text{avec} \quad A = \frac{ka}{m}$$

$$\Leftrightarrow (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \underline{X} = A$$

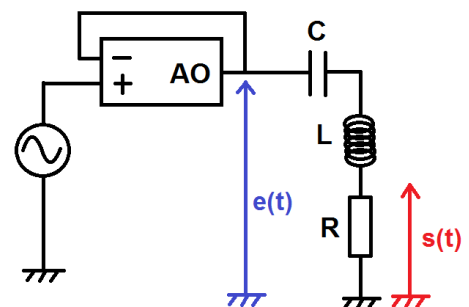
$$\Leftrightarrow \underline{X} = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Ainsi dans le cas idéal où il n'y a pas de frottement, on constate en effet une amplitude infinie des oscillations lorsque $\omega = \omega_0$, c'est-à-dire lorsque $f = f_0$.

2. Notion de filtrage : résonance en électricité avec le filtre RLC

2.1. Diagrammes de Bode

On réalise le circuit ci-contre. Il comporte une résistance variable, une bobine de **46,3 mH** et un condensateur de **540 nF**. Comme pour le ressort, on étudie l'influence d'une excitation extérieure. On retrouve celle-ci dans le signal d'entrée $e(t)$. Celui-ci est produit par un GBF et un montage suiveur permet d'éviter toute influence provenant du circuit grâce à une impédance de sortie infinie. Le signal de sortie étudié est la tension aux bornes de la résistance. Celle-ci est proportionnelle à l'intensité du courant circulant dans les différents composants.



On définit dans le plan complexe la fonction de transfert du système comme étant $\underline{H}(f) = \frac{s(t)}{e(t)}$. On peut alors étudier le gain défini par $G = 20 \log(|\underline{H}|)$. Pour ce faire, on mesure l'amplitude crête à crête des signaux de sortie et d'entrée en fonction de la fréquence. En parallèle on mesure aussi le déphasage entre

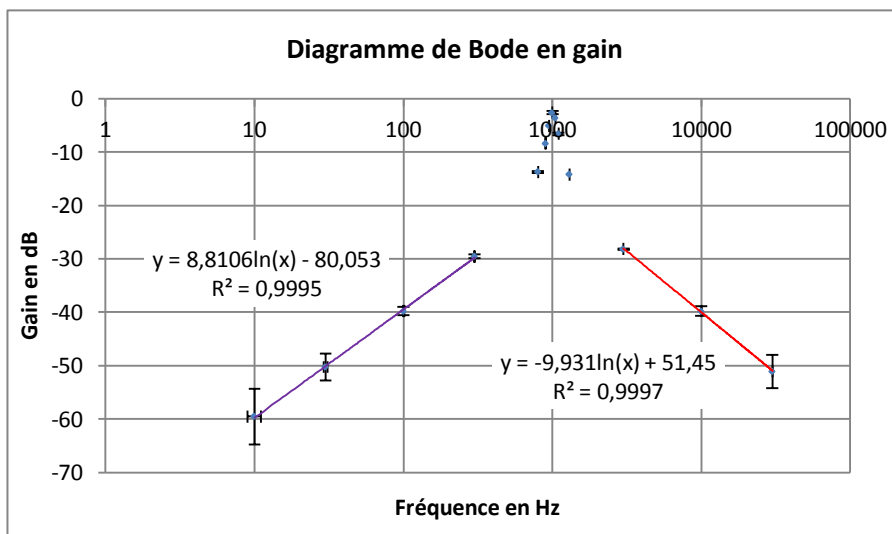
les signaux. Une fois les mesures effectuées, on peut tracer les diagrammes de Bode correspondants. Il s'agit de représenter le gain et la phase en fonction de la fréquence sur une échelle logarithmique.

NB : L'amplificateur opérationnel peut poser quelques problèmes de saturation. On peut l'éviter en diminuant l'amplitude du signal d'entrée. Cependant dans ce cas le signal sortant sera trop faible hors de la résonance. Il est donc important d'adapter pour chaque mesure l'amplitude.

On réalise une première série de mesures en prenant une résistance $R = 30 \Omega$. On prend soin d'espacer les points en fréquence de manière à avoir une disposition homogène sur l'échelle logarithmique.

a) Diagramme de Bode en gain

Lorsque l'on trace le diagramme de Bode en gain, on constate que l'on a deux demi-droites se coupant en un



point de fréquence $f_0 = 1,00 \text{ kHz}$.

Les points autour de cette valeur ne sont plus sur les demi-droites mais on constate que l'amplitude est effectivement maximale à cette fréquence.

Qui plus est si on effectue des régressions logarithmiques sur les points alignés, on constate des pentes de +20 dB/décade avant la résonance et -20 dB/décade après.

NB : La régression se fait sur un logarithme classique et non pas un logarithme en base 10. Il faut donc multiplier la pente donnée par $\ln(10)$ pour obtenir la pente en dB/décade.

Explication mathématique :

Tensions entrant en jeu :

- aux bornes du condensateur $u_C = \frac{q}{C}$
- aux bornes de la bobine $u_L = L \frac{di}{dt}$
- aux bornes de la résistance $u_R = Ri$

La loi des mailles donne alors $e(t) = \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} + Ri (*)$

Dans le plan complexe et en régime permanent, toutes les grandeurs (q, i et u) sont de la forme

$$\underline{x} = \underline{X} e^{j\omega t} = \underline{X} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Lorsque l'on dérive l'expression (*), on obtient

$$j\omega \underline{E} = \frac{i}{C} - \omega^2 L \underline{i} + j\omega R \underline{i}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{LC} - \omega^2 + j\omega \frac{R}{L} \right) \underline{i} = \frac{j\omega}{L} \underline{E}$$

$$\Leftrightarrow \underline{i} = \frac{\frac{j\omega}{L}}{\frac{1}{LC} - \omega^2 + j\omega \frac{R}{L}} \underline{E}$$

Alors
$$\underline{H} = \frac{u_R}{e} = \frac{R \frac{j\omega}{L}}{\frac{1}{LC} - \omega^2 + j\omega \frac{R}{L}} = \frac{1}{1 - j \frac{L}{R} \left(\frac{1}{\omega LC} - \omega \right)} = \frac{1}{1 - j \frac{1}{R \sqrt{LC}} \left(\frac{1}{\omega \sqrt{LC}} - \omega \sqrt{LC} \right)}$$

On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ donnant ainsi
$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Alors
$$|\underline{H}| = \left| \frac{u_R}{e} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

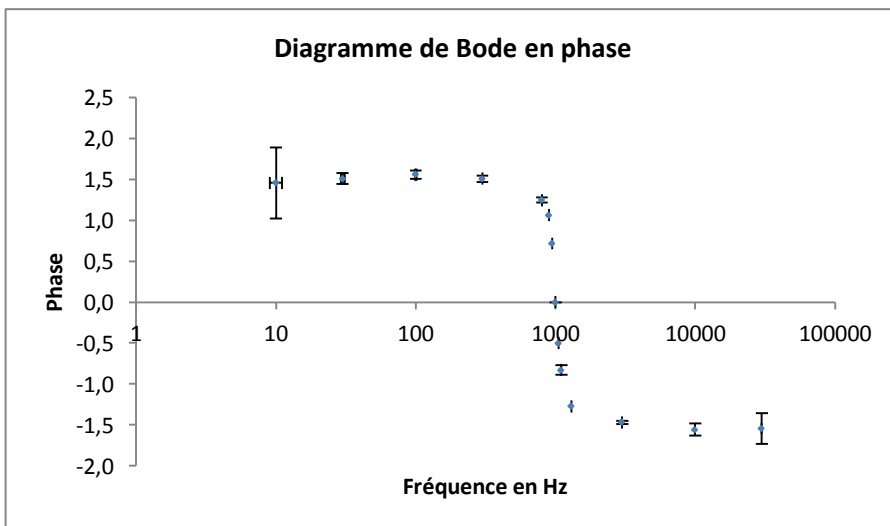
Donnant le gain
$$G = -10 \cdot \log \left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right)$$

Développements limités :

- pour $\omega \ll \omega_0$, on aura $G \approx 20 \cdot \log(\omega) + 20 \cdot \log\left(\frac{Q}{\omega_0}\right)$ soit une pente de +20dB/déc
- pour $\omega \gg \omega_0$, on aura $G \approx -20 \cdot \log(\omega) + 20 \cdot \log(Q \cdot \omega_0)$ soit une pente de -20dB/déc
- pour $\omega = \omega_0$, on aura $G = 0$

On en déduit donc que ω_0 est la pulsation propre du système donnant $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1,00 \text{ kHz}$.

b) *Diagramme de Bode en phase*



Le diagramme montre que le déphasage entre le signal d'entrée et celui de sortie passe de $\pi/2$ lorsque $\omega \ll \omega_0$ à $-\pi/2$ lorsque $\omega \gg \omega_0$ avec une brusque variation à $\omega = \omega_0$.

Explication mathématique :

On rappelle que
$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

On en tire le déphasage
$$\varphi = -\arctan \left(Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)$$

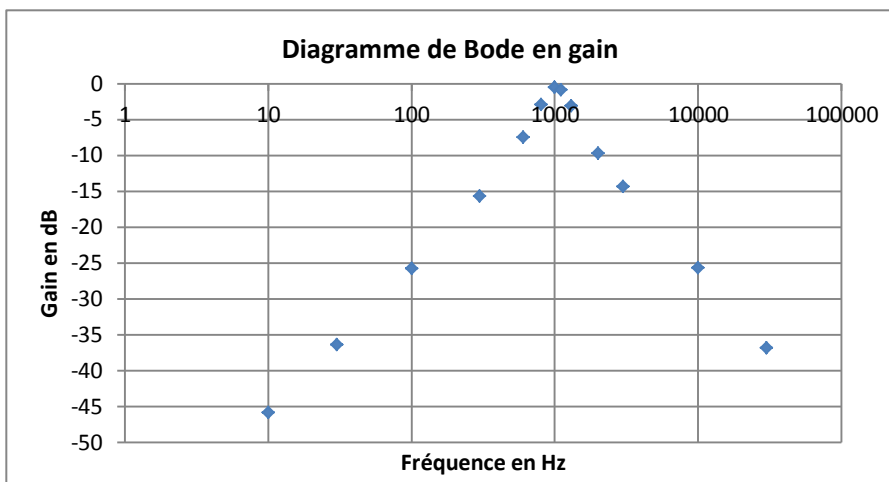
Développements limités :

- pour $\omega \ll \omega_0$, on aura $\varphi \approx \arctan \left(Q \frac{\omega_0}{\omega} \right) \approx \frac{\pi}{2}$ soit une pente de +20dB/déc
- pour $\omega \gg \omega_0$, on aura $\varphi \approx -\arctan \left(Q \frac{\omega}{\omega_0} \right) \approx -\frac{\pi}{2}$ soit une pente de -20dB/déc
- pour $\omega = \omega_0$, on aura $\varphi = 0$

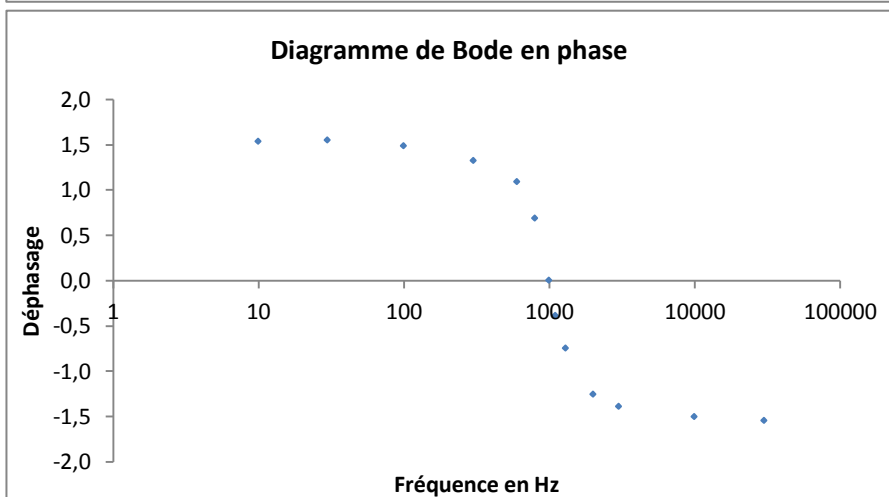
2.2. Influence du facteur de qualité

Le phénomène de résonance observé ici peut avoir des applications en tant que filtre. En effet, si plusieurs signaux sont délivrés en entrée du système, ce sont ceux aux fréquences les plus proches de la résonance qui seront conservés (et/ou amplifiés) en sortie.

Un peu plus tôt, on a défini $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$. Il s'agit du facteur de qualité du filtre. On cherche à étudier son influence. On répète donc les mesures précédentes en prenant $R = 150 \Omega$ soit un facteur de qualité 5 fois inférieur au précédent.



Si on compare les diagrammes aux précédents, on constate que la fréquence de résonance n'a pas changé. De même la pente des points aligné avant la résonance est toujours de +20 dB/décades et après de -20 dB/décades. Par contre on constate qu'autour de la résonance, le pic est beaucoup plus étroit lorsque le facteur de qualité est supérieur. De même la variation du déphasage est beaucoup plus brutale dans ce cas.



Plus le facteur de qualité sera élevé et plus le filtre sera sélectif. Pour le mettre en évidence, on peut mesurer la bande passante $\Delta\omega$. Il s'agit de la largeur de la plage de fréquence autour de la résonance pour laquelle le gain n'a pas diminué de plus de 2dB.

- Pour $R = 30\Omega$, on mesure $\Delta\omega_1 =$
- Pour $R = 150 \Omega$, on mesure $\Delta\omega_2 =$

On peut à partir de ces valeurs retrouver expérimentalement le facteur de qualité aussi défini par $Q = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$.

- $Q_{1,th} = 0,309$ et $Q_{1,exp} =$
- $Q_{2,th} = 0,0617$ et $Q_{2,exp} =$

On retrouve en effet les mêmes valeurs.

Ce genre de circuits va servir par exemple à sélectionner une fréquence particulière pour un récepteur radio. Dans le cas de vieux récepteurs, on déplaçait une aiguille sur une bobine pour en faire varier la longueur et donc l'inductance afin de choisir la fréquence propre du filtre. Ceci montre aussi l'importance d'avoir un bon facteur de qualité. Plus celui-ci est élevé et plus l'on pourra placer de fréquences différentes sans qu'elles empiètent l'une sur l'autre à la réception. Le filtre est limité en général par la résistance interne de la bobine.

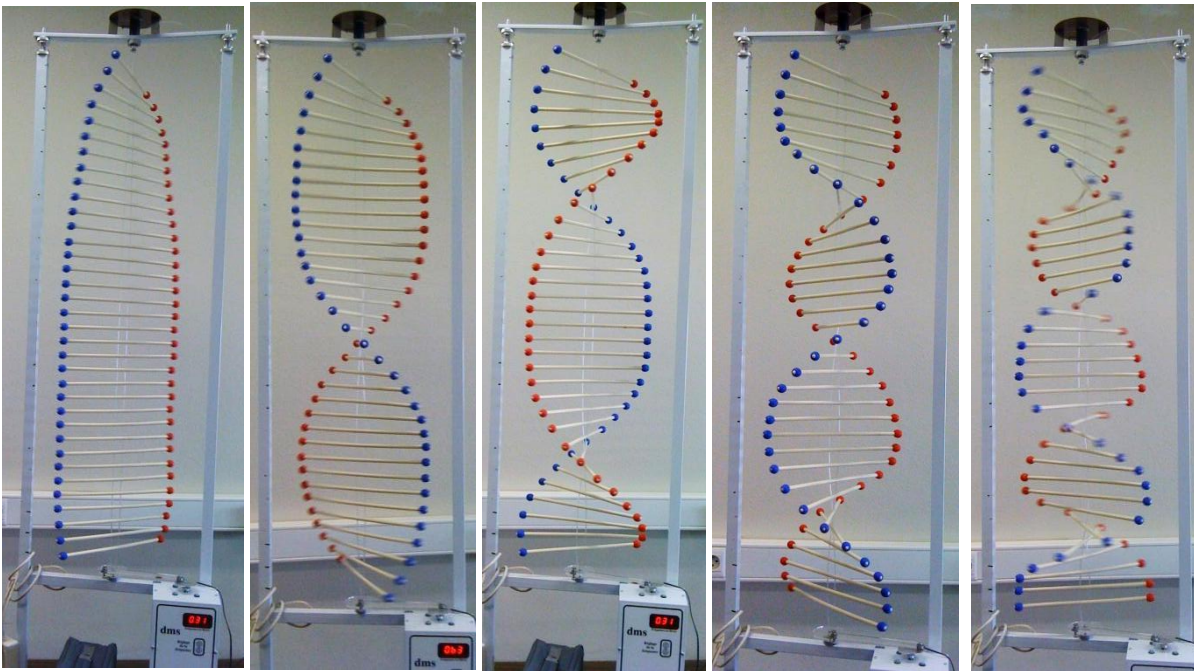
3. Résonance et ondes stationnaires

Le phénomène d'onde stationnaire se rencontre lorsqu'une onde est réfléchiée et se superpose à l'onde incidente. On les qualifie alors de stationnaire car la superposition donne une onde composée de ventres (où l'amplitude des oscillations est maximale) et de nœuds (où elle est minimale) qui ont des positions fixes dans l'espace.

3.1. Mise en évidence sur l'échelle à perroquet : ondes de torsion

L'échelle de perroquet est constituée d'une succession de tiges lestées à leurs extrémités et fixée à un fil. Les ondes se propageant sont des ondes de torsion (ondes transversales). Si l'on exerce une impulsion sur l'échelle, on la voit se déplacer le long du fil, être réfléchiée à l'extrémité puis revenir.

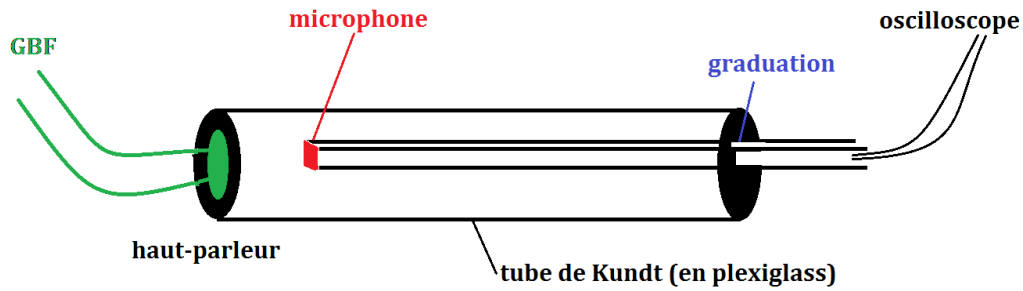
Si on exerce une excitation sinusoïdale à l'aide d'un moteur, on va pouvoir observer la superposition de l'onde et de sa réflexion. On constate alors l'apparition des ventres et des nœuds de vibrations. L'amplitude des ventres est modérée et les nœuds n'ont pas une amplitude totalement nulle. En faisant varier la fréquence, on arrive à obtenir des oscillations maximale lorsque $f_0 = 31 \text{ Hz}$. A cette fréquence on observe un unique ventre et deux nœuds aux extrémités du dispositif. On peut ici aussi parler de résonance.



Ensuite, lorsque l'on augmente progressivement la fréquence, on observe un nombre croissant de ventres et de nœuds à chaque fois que l'on est à une fréquence multiple de la première. On qualifie la fréquence f_0 de **fondamental**. Les autres modes sont les **harmoniques** successifs.

3.2. Tube de Kundt : ondes stationnaires acoustiques (longitudinales)

Les ondes acoustiques sont des ondes de pression. On travaille ici avec un **tube de Kundt**. Ce dispositif est composé d'un tube de plexiglass bouché à ses deux extrémités par un haut parleur et une surface permettant de faire glisser un microphone à l'intérieur. Le haut-parleur est alimenté par un GBF.

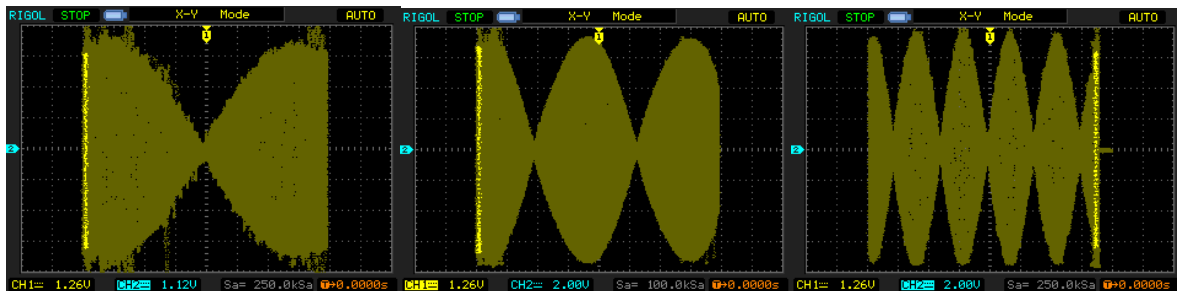


On connecte l'entrée Y d'un oscilloscope au microphone. On constate, en le déplaçant, qu'il existe des maxima et des minima de vibration dans le tube. Ce sont les ventres et nœuds caractéristiques d'une onde stationnaire. A l'extrémité du tube où se trouve le haut-parleur, on a un ventre de vibration et à l'autre on en a un second. En effet, la paroi de vibrant pas, c'est là que la pression est maximale.

Harmonique	f (Hz)
0	425,4
1	794
2	1069
3	1407
4	1747
5	2089
6	2431
7	2772
8	3112
9	3453
10	3795
11	4136
12	4478

Encore une fois, on constate que si l'on fait varier la fréquence, l'amplitude des ventres varie grandement. Il faut prendre garde à ne pas saturer le microphone. Comme dans le cas du circuit RLC, on adapte à chaque fois l'amplitude du signal d'entrée. On cherche, comme pour l'échelle de perroquet, les fréquences du mode fondamental et des harmoniques successifs.

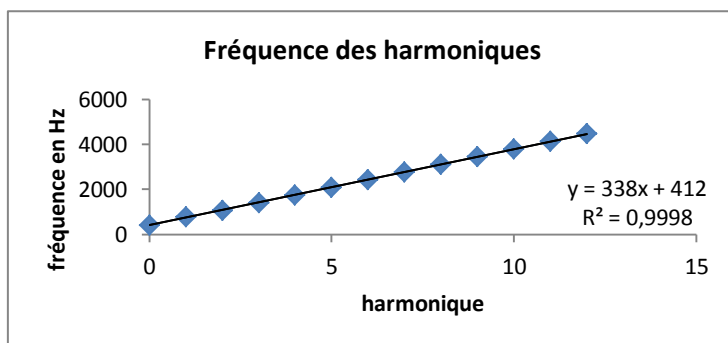
On peut les mettre en évidence en connectant le capteur de position du microphone à la voie X de l'oscilloscope et en passant en mode XY. Si on a sélectionné la persistance de l'image et que l'on déplace le microphone lentement, on obtient une image.



mode fondamental

1^{er} harmonique

4^{ème} harmonique



On constate aussi que tous les modes harmoniques ont des fréquences multiples du fondamental. Une régression linéaire permet d'obtenir l'écart entre les modes : **338Hz**.

La longueur entre deux nœuds ou deux ventres correspond à $\lambda/2$. Ceci s'explique par le fait que deux ventres successifs vibrent en opposition de phase et donc qu'une période spatiale correspond deux ventres et deux nœuds.

On a donc la relation à la résonance $d = (n + 1) \frac{\lambda}{2}$ où d est la longueur du tube de Kundt (ici **50cm**) et n le mode considéré.

Or à chaque harmonique supérieur, un ventre et un nœud supplémentaires apparaissent. On en déduit que le mode fondamental de 338Hz calculé correspond à la longueur d'onde $\lambda=2d$. La célérité du son des ondes de pression dans l'air (vitesse du son) est calculable comme $c = \lambda.f$.

Au mode fondamental, on aura $c = 2.d.f = 338\text{m/s}$. Le résultat est très proche de la valeur tabulée à la pression atmosphérique de 1 bar et à 15°C : 341 m/s. On peut attribuer la différence de températures aux erreurs lors du repérage des fréquences des différents harmoniques (même si cette erreur est minimisée par la régression linéaire effectuée) et à la mesure de la longueur du tube mais aussi au fait que la température et la pression atmosphérique ne sont pas exactement les mêmes.

C'est sur ce principe que reposent les caisses de résonances des différents instruments de musique. Le cas le plus simple est le diapason. Celui-ci produit un « la », c'est-à-dire une onde acoustique à la fréquence de 440 Hz. Le son du diapason seul n'est pas très fort mais si on le fixe sur sa caisse de résonance le son est fortement amplifié. Comme pour le tube de Kundt, la caisse est le siège d'ondes stationnaires. La longueur de la caisse est choisie pour correspondre à $\lambda/2$.



Dans le cas des instruments à vent, la longueur du tube permet, en variant de sélectionner la fréquence. En effet en soufflant dans l'instrument, le musicien introduit une multitude de fréquences. L'instrument joue alors le rôle de filtre comme pour le circuit RLC.

Conclusion

Comme le titre du montage l'indique, on retrouve la résonance dans presque tous les domaines de la physique. Ceci peut causer des risques en mécanique lorsque l'on construit des édifices soumis aux intempéries mais cela peut aussi servir à sélectionner certaines fréquences parmi d'autres que l'on désire éliminer. L'application la plus connue est celle des instruments de musique.

Un domaine très important de la physique n'a pas été couvert dans ce montage. Il s'agit de l'optique. Le LASER (*light amplification by stimulated emission of radiation*), fut inventé en 1958 (bien qu'il s'agisse alors d'un MASER) bien que l'idée soit décrite par Einstein dès 1917. Le faisceau laser est obtenu par passage successif à travers un milieu amplificateur. Pour ce faire, le faisceau est réfléchi sur des miroirs aux extrémités d'une cavité. Ces miroirs sont semi-réfléchissants pour permettre d'alimenter le faisceau et de le laisser en partie ressortir. La cavité est là pour assurer la sélection très précise d'une longueur d'onde afin d'avoir un faisceau monochromatique.