

**SESSION DE 2001****concours externe  
de recrutement de professeurs certifiés  
et concours d'accès à des listes d'aptitude (CAFEP)****section : physique et chimie**

composition de physique avec applications

**Durée : 5 heures**

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est interdit.

*Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numération complète (chiffres et lettres) des questions de l'énoncé.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant la raison des initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.*

*L'indication de l'unité employée devra être précisée pour chacun des résultats numériques.*

## PARTIE A. MODULATION ET DÉMODULATION

Pour la transmission de messages, on utilise souvent le principe de la modulation d'une tension de fréquence élevée par la tension  $v_m(t)$  représentant le message à transmettre. La tension de fréquence élevée s'appelle la porteuse, et sera notée  $v_p(t)$ . Lorsque l'on dit que la porteuse a une fréquence élevée, cela signifie plus précisément que la tension représentant le message ne comporte que des fréquences faibles devant celle de la porteuse. La tension modulée sera notée  $s(t)$ .

### A.I. GÉNÉRALITÉS

~~A.I.1.~~ Donner deux raisons parmi celles qui justifient le recours à la modulation.

~~A.I.2.a)~~ À l'aide de graphes représentant  $v_m(t)$  d'une part,  $s(t)$  d'autre part, définir ce qu'on appelle modulation d'amplitude et modulation de fréquence.

~~A.I.2.b)~~ Donner les expressions mathématiques de  $s(t)$  dans chacun des deux cas, en prenant pour la porteuse une tension de la forme  $v_p(t) = A \cos(2\pi f_p t)$ .

A.I.3. On se place dans le cas particulier où la tension  $v_m(t)$  est également sinusoïdale, et l'on pose  $v_m(t) = B \cos(2\pi f_m t)$ . Pour les applications numériques, on prendra  $f_m = 8 \text{ kHz}$ , et  $f_p = 200 \text{ kHz}$ .

~~A.I.3.a)~~ Donner les fréquences qui interviennent dans le spectre de  $s(t)$  dans le cas de la modulation d'amplitude.

A.I.3.b) Dans le cas de l'émission radiophonique en modulation d'amplitude, quel écart minimal doit exister entre les fréquences porteuses de deux stations, sachant que la bande passante est limitée à 8 kHz pour le son que l'on transmet.

A.I.3.c) En Europe de l'Ouest, les stations radiophoniques émettant en Grandes Ondes sont réparties selon le plan de fréquences suivant :

Deutschlandfunk :	153 kHz	France Inter :	162 kHz	Europe n°1 :	182 kHz
BBC :	198 kHz	RMC :	216 kHz	RTL :	234 kHz

Ce plan de fréquences vous semble-t-il respecter le critère établi au A.I.3.b) ?

A.I.3.d) Si l'on voulait une meilleure qualité sonore lors de la réception d'émissions en Grandes Ondes, il faudrait faire passer la bande passante pour le son transmis de 8 kHz à 18 kHz. Combien de stations pourraient alors exister sur la bande des Grandes Ondes, sachant qu'elle s'étend de 153 kHz à 279 kHz ?

A.I.4. Lors de l'émission, puis de la réception d'un signal modulé en amplitude, on effectue un filtrage pour isoler la tension modulée  $s(t)$  des autres tensions (parasites, autres émetteurs ...) qui pourraient s'introduire dans le montage.

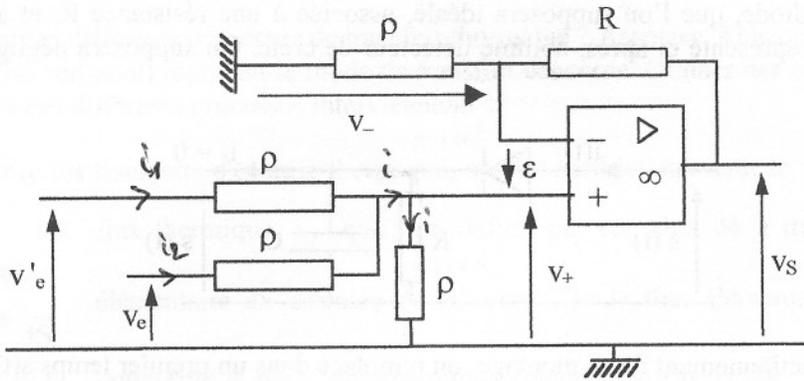
A.I.4.a) Quel type de filtre utilise-t-on ?

A.I.4.b) En prenant l'exemple d'un récepteur accordé sur l'émetteur de France Inter en Grandes Ondes, déterminer la bande passante que doit avoir le filtre d'accord du récepteur. On utilisera les données fournies dans la question A.I.3.

A.I.4.c) Quelle allure la fonction gain-fréquence du filtre d'accord doit-elle avoir à l'intérieur de la bande passante pour que la réception du son soit la plus fidèle possible ? Sinon, que se produira-t-il ?

A.II. MISE EN ŒUVRE DE LA MODULATION D'AMPLITUDE

A.II.1. On considère le montage suivant, l'amplificateur opérationnel étant supposé parfait :



Toutes les résistances, sauf R, ont une valeur commune, notée  $\rho$ .

On note  $v_-$  et  $v_+$  les potentiels respectifs de l'entrée inverseuse et non inverseuse de l'amplificateur opérationnel, ces potentiels étant mesurés par rapport à la masse du montage.

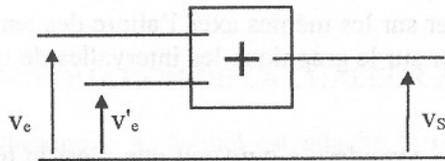
A.II.1.a) Etablir l'expression de  $v_+$  en fonction de  $v_e$  et  $v'_e$ , et celle de  $v_-$  en fonction de  $v_s$ .

A.II.2.b) Justifier brièvement le mode de fonctionnement (linéaire ou saturé) de l'amplificateur opérationnel. Que vaut alors  $\epsilon$  ?

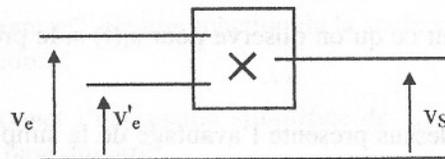
A.II.1.c) En déduire la valeur qu'il faut donner à R pour avoir  $v_s = v_e + v'_e$ .

A.II.1.d) Quel ordre de grandeur préconiserez-vous dans la pratique pour la valeur numérique de  $\rho$  ?

A.II.2. Dans les questions suivantes, on supposera que la condition  $v_s = v_e + v'_e$  est satisfaite, et on représentera le montage additionneur ainsi réalisé par le symbole suivant :



De la même façon, on représentera le montage multiplieur par :



Pour le montage multiplieur, on a  $v_s = k v_e v'_e$ , avec  $k = 0,1 \text{ V}^{-1}$ .

Le générateur délivrant le signal de fréquence  $f_p$  est réglé avec une amplitude de 10 V. Associer les montages précédents avec des générateurs dont vous préciserez les caractéristiques et les réglages, afin de créer le signal suivant :

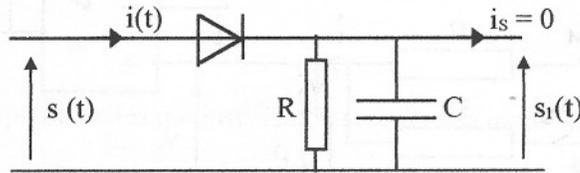
$$s(t) = A [1 + m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_p t),$$

On prendra les valeurs numériques suivantes :  $f_m = 1 \text{ kHz}$ ,  $f_p = 200 \text{ kHz}$ ,  $A = 10 \text{ V}$ ,  $m = 0,2$ .

**Tournez la page S.V.P.**

### A.III. DÉMODULATION D'AMPLITUDE

A.III.1. Après réception, la tension  $s(t)$  précédente doit être démodulée. Une façon simple de procéder est d'utiliser une diode, que l'on supposera idéale, associée à une résistance  $R$ , et à une capacité  $C$  selon le montage représenté ci-après, nommé détecteur de crête. On supposera négligeable le courant  $i_s$  débité en sortie.



Pour étudier le fonctionnement de ce montage, on remplace dans un premier temps  $s(t)$  par une tension purement sinusoïdale  $v(t) = V_0 \cos \omega t$ . On note  $T$  la période correspondante.

A.III.1.a) Lorsque la diode est passante, redessiner le schéma du montage.

A.III.1.b) La diode étant toujours supposée passante, on cherche l'expression de  $i(t)$  sous la forme  $I_0 \cos(\omega t + \phi)$ . En utilisant les notations complexes, expliciter les expressions de  $I_0$  et de  $\phi$  en fonction de  $V_0$ ,  $R$ ,  $C$  et  $\omega$ . Justifier l'intervalle dans lequel le déphasage  $\phi$  se situe.

A.III.1.c) La diode étant toujours supposée passante, à quel instant  $t_0$  compris entre 0 et  $T$  le courant  $i(t)$  s'annule-t-il en décroissant? Exprimer  $t_0$  en fonction de  $T$ ,  $\phi$  et  $\omega$ . Aux instants suivant immédiatement  $t_0$ , que peut-on prévoir quant à l'état de la diode?

A.III.2.a) Lorsque la diode est bloquée, redessiner le schéma du montage.

A.III.2.b) La diode étant toujours supposée bloquée, et en notant  $U_0$  la tension initiale sur une nouvelle échelle de temps  $t'$ , établir l'expression de la tension  $s_1(t')$ . À quelle condition portant sur  $v(t)$  et  $s_1(t)$  la diode reste-t-elle effectivement bloquée?

A.III.3. Sans justification, dessiner sur les mêmes axes l'allure des tensions  $v(t)$  et  $s_1(t)$  en fonction du temps. Sur une période  $T$ , préciser sur le graphique les intervalles de temps où la diode est bloquée, et ceux où elle est passante.

A.III.4.a) Dans cette question, on considère à nouveau que c'est la tension modulée  $s(t)$  définie à la question A.II.2. qui est appliquée à l'entrée du détecteur de crête. Comment choisir la valeur du produit  $RC$  pour effectuer une démodulation correcte? Proposer une valeur numérique pour  $RC$ .

A.III.4.b) Indiquer qualitativement ce qu'on observe pour  $s_1(t)$  si le produit  $RC$  est trop faible, ou trop grand?

A.III.5. Le circuit représenté ci-dessus présente l'avantage de la simplicité. Cependant, les récepteurs radiophoniques qui nous entourent utilisent un autre principe de démodulation. Lequel et pourquoi?

### A.IV. PROPAGATION . QUESTION DE CULTURE GÉNÉRALE

À puissance émise égale, expliquer rapidement pourquoi tous les émetteurs n'ont pas la même portée, selon la gamme de fréquence dans laquelle ils émettent, et pourquoi cette portée se modifie entre le jour et la nuit. Qu'est-ce qui justifie le choix des ondes centimétriques pour les communications par satellites?

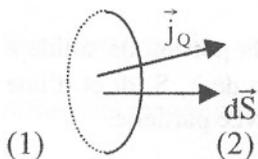
Vos réponses devront être comprises par des élèves de niveau lycée, et ne comporter aucun calcul.

### PARTIE B. DIFFUSION THERMIQUE

#### B.I. GÉNÉRALITÉS

B.I.1. Quels sont les différents processus de transfert thermique ? Associer, à chaque fois que vous le pourrez, une loi (ou son nom) régissant le mode de transfert concerné. Donner des exemples pris dans la vie courante, où ces différents processus interviennent.

B.I.2. Pour décrire les transferts d'énergie thermique, on fait parfois intervenir le vecteur densité de flux thermique  $\vec{j}_Q$ , que l'on définit par son flux  $d\phi$  à travers une surface



élémentaire  $d\vec{S}$  orientée de (1) vers (2) : le flux élémentaire  $d\phi = \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$

représente la puissance thermique échangée à travers  $d\vec{S}$ , fournie par (1) et reçue par (2).

Le flux  $d\phi$  étant une grandeur algébrique, expliciter le sens des transferts effectifs de puissance thermique entre (1) et (2) à travers  $d\vec{S}$  lorsque  $d\phi$  est positif, puis lorsque  $d\phi$  est négatif.

B.I.3. L'expression mathématique de  $\vec{j}_Q$  dans le cas du transfert de chaleur à travers un milieu solide, est de la forme  $\vec{j}_Q = -\lambda \vec{\nabla} T$ ,  $\lambda$  représentant la conductivité thermique du milieu ( $\lambda > 0$ ).

On rappelle l'expression en coordonnées cartésiennes de l'opérateur gradient  $\vec{\nabla}$  :

$$\vec{\nabla} T(x, y, z, t) = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z$$

B.I.3.a) Expliquer la signification du signe “ - ” qui intervient dans l'expression de  $\vec{j}_Q$ .

B.I.3.b) Rappeler l'unité de  $\lambda$ .

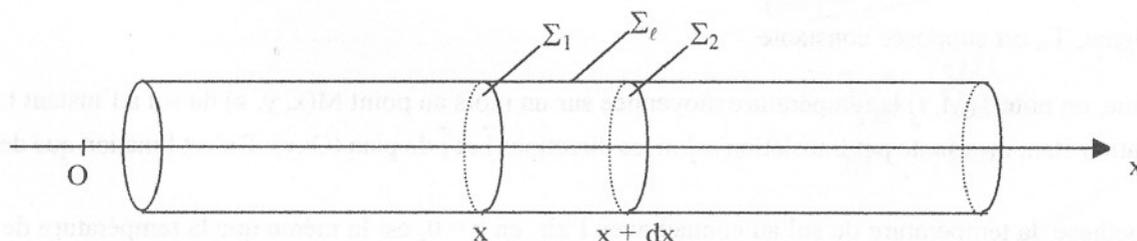
#### B.II. ÉTABLISSEMENT DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR À UNE DIMENSION

Soit un solide de conductivité thermique  $\lambda$ , auquel est attaché le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Sa chaleur massique est notée  $c$ , sa masse volumique  $\rho$ . Les grandeurs  $\lambda$ ,  $\rho$  et  $c$  seront supposées uniformes et stationnaires.

À l'intérieur du solide, la température  $T$  est une fonction de la seule variable de position  $x$  et du temps  $t$ . On note donc  $T(x, t)$  cette fonction.

B.II.1. Avec ces hypothèses, donner l'expression simplifiée de  $\vec{j}_Q$  en fonction de  $\lambda$ , d'une dérivée partielle de  $T$  et d'un vecteur de base unitaire.

B.II.2. On considère la portion de solide décrite ci-après :



Tournez la page S.V.P.

La portion de solide considérée est délimitée par la surface fermée constituée des surfaces  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_\ell$ . Les points de  $\Sigma_1$  ont tous la même abscisse  $x$ , ceux de  $\Sigma_2$  ont pour abscisse  $x + dx$ . On note  $S$  l'aire des surfaces  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . La surface  $\Sigma_\ell$  est une portion de cylindre de hauteur  $dx$  dont les génératrices sont parallèles à l'axe  $(O x)$ .

On suppose par ailleurs qu'il n'y a pas de source thermique dans le solide.

B.II.2.a) Soit  $\delta Q_1$  la quantité de chaleur élémentaire reçue par la portion de solide à travers la surface  $\Sigma_1$  entre l'instant  $t$  et l'instant  $t + dt$ . Exprimer  $\delta Q_1$  en fonction de  $\lambda$ ,  $S$ ,  $dt$  et d'une dérivée partielle de  $T$ . On aura soin de préciser les valeurs des variables de la dérivée partielle.

B.II.2.b) De même,  $\delta Q_2$  représente la quantité de chaleur élémentaire cédée par la portion de solide à travers la surface  $\Sigma_2$  entre l'instant  $t$  et l'instant  $t + dt$ . Exprimer  $\delta Q_2$  en fonction de  $\lambda$ ,  $S$ ,  $dt$  et d'une dérivée partielle de  $T$ . On aura soin de préciser les valeurs des variables de la dérivée partielle.

B.II.2.c) Justifier que la portion de solide n'échange aucune énergie thermique à travers  $\Sigma_\ell$ .

B.II.2.d) Soit  $\delta^2 Q$  la quantité de chaleur totale reçue par la portion de solide entre les instants  $t$  et  $t + dt$ . Relier  $\delta^2 Q$  à  $\delta Q_1$  et  $\delta Q_2$ . Exprimer ensuite  $\delta^2 Q$  en fonction d'une dérivée de  $T$ ,  $\lambda$ ,  $S$ ,  $dt$  et  $dx$ .

B.II.2.e) Relier également  $\delta^2 Q$  à la variation, entre ces deux instants, de la température  $dT$  de la portion étudiée. On fera intervenir les grandeurs  $\rho$ ,  $c$ ,  $S$  et  $dx$ .

B.II.2.f) Exprimer la variation de température  $dT$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  en fonction d'une dérivée partielle de  $T(x, t)$  et de  $dt$ .

B.II.2.g) Dédurre des trois questions précédentes que l'on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Préciser l'expression de  $a$  en fonction de la masse volumique  $\rho$ , de la chaleur massique  $c$  et de la conductivité thermique  $\lambda$ . Cette relation constitue l'équation de la chaleur à une dimension. Le coefficient  $a$  est appelé diffusivité thermique.

### B.III. DIFFUSION DE LA CHALEUR DANS LE SOL

Le sol est assimilé à un milieu solide homogène de masse volumique  $\rho$ , de chaleur massique  $c$  et de conductivité thermique  $\lambda$ . Il occupe le demi-espace d'équation  $z < 0$ , et est surmonté par l'air, dont la température moyennée sur une durée assez longue (de l'ordre du mois) évolue au rythme des saisons. On note  $T_{\text{air}}(t)$  cette température moyennée sur un mois, et on modélise son évolution dans le temps par une variation sinusoïdale centrée sur la valeur moyenne **annuelle** de la température, notée  $T_m$  :

$$T_{\text{air}}(t) = T_m + T_A \cos(\omega t + \varphi).$$

La pulsation  $\omega$  correspond à une période égale à un an.

Par ailleurs,  $T_m$  est supposée constante.

De même, on note  $T(M, t)$  la température moyennée sur un mois au point  $M(x, y, z)$  du sol à l'instant  $t$ . La situation étant invariante par translation selon les directions  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  du plan  $(Oxy)$ ,  $T$  n'est fonction que de  $z$  et  $t$ .

Par hypothèse, la température du sol au contact avec l'air, en  $z = 0$ , est la même que la température de l'air qui le surplombe, ce qui fournit une première condition limite :

$$T(z = 0, t) = T_{\text{air}}(t) = T_m + T_A \cos(\omega t + \varphi)$$

B.III.1. En faisant coïncider l'origine des temps avec le moment le plus froid de l'année (pris ici au 1<sup>er</sup> février), quelle est la valeur de  $\varphi$ ? On suppose que  $T_A$  est positif.

B.III.2. On pose  $\theta(z, t) = T(z, t) - T_m$ .

À  $z$  fixé,  $\theta(z, t)$  est une fonction sinusoïdale du temps, car on se situe en régime sinusoïdal forcé, de pulsation  $\omega$ . On introduit la fonction complexe  $\underline{\theta}(z, t) = \underline{\theta}_A(z) \exp(j\omega t)$ , avec  $j^2 = -1$ . On recherche les solutions de l'équation de la chaleur sous la forme de  $T(z, t) = T_m + \Re(\underline{\theta}(z, t))$ .

Dans cette partie, on notera que l'équation de la chaleur a pour expression  $\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ , la diffusivité thermique  $a$  ayant l'expression déterminée à la question B.II.2.g).

B.III.2.a) Justifier que  $\theta(z, t)$ , puis  $\underline{\theta}(z, t)$  sont solutions de l'équation de la chaleur.

B.III.2.b) Établir l'équation différentielle vérifiée par  $\underline{\theta}_A(z)$ .

B.III.2.c) Donner la forme générale de la solution en  $\underline{\theta}_A(z)$ , puis en  $\underline{\theta}(z, t)$ .

B.III.2.d) Dans les deux termes que comporte  $\underline{\theta}(z, t)$ , identifier celui qui correspond à une onde se propageant dans le sens des  $z$  croissants, et celui qui correspond à une onde se propageant dans le sens des  $z$  décroissants. Lequel de ces deux termes est physiquement inacceptable et pourquoi? En déduire la valeur de l'une des deux constantes d'intégration qui interviennent dans l'expression de  $\underline{\theta}_A(z)$ .

B.III.2.e) Déterminer l'expression de l'autre constante d'intégration, et fournir l'expression définitive de  $T(z, t)$  dans le sol.

B.III.3. On fournit la valeur numérique de la diffusivité thermique  $a = 3 \cdot 10^{-7}$  u SI. La valeur numérique de  $\omega$  se déduit de l'énoncé.

B.III.3.a) Soit une cave dont la profondeur moyenne vaut  $|z_m|$ . On admet que la température de cette cave est la même que celle du sol voisin à la cote  $z_m$ . À quelle profondeur faut-il creuser une cave pour que l'amplitude des variations annuelles de température ne soit plus que le dixième de ce qu'elle est à l'extérieur?

B.III.3.b) À quel moment de l'année fait-il le plus froid dans la cave creusée à une telle profondeur?

B.III.3.c) Dans la cave précédente, on cherche à évaluer l'influence des variations quotidiennes de la température, liées à l'alternance du jour et de la nuit. À la profondeur de la cave, calculer le rapport entre l'amplitude de ces variations au niveau du sol et à l'intérieur de la cave, et conclure.

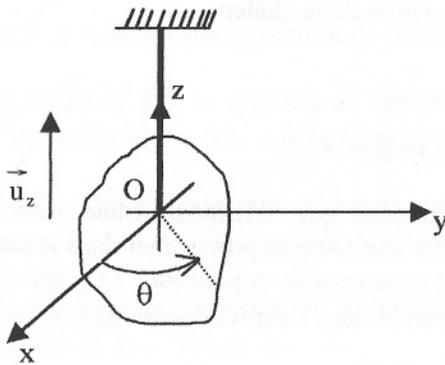
ok (c'est le centre d'inertie)

### PARTIE C. QUELQUES CONSIDÉRATIONS À PROPOS DES OSCILLATIONS

#### MÉCANIQUES AUTOUR D'UN AXE FIXE

##### C.I. PRÉLIMINAIRES

Dans un référentiel galiléen auquel on attache le repère (O x y z), un solide est mobile autour de l'axe (Oz). Le dispositif est équilibré, de sorte que le centre d'inertie du solide est sur l'axe de rotation ; on le placera en O. L'axe de rotation est constitué d'un fil de torsion de constante C ; une extrémité du fil de torsion est maintenue fixe par un support, l'autre extrémité est attachée au solide en rotation. On note J le moment d'inertie du solide autour de l'axe de rotation, et on appelle  $\theta$  l'angle de torsion du fil. Ce même angle  $\theta$  sert aussi à repérer la position du solide dans son mouvement de rotation. L'ensemble est représenté ci-dessous :



C.I.1. En l'absence de frottement, établir l'équation différentielle vérifiée par  $\theta$ . Quelle est la nature de cette équation ? Quelle est la forme générale de ses solutions ? Faire apparaître une pulsation propre  $\omega_0$  que l'on exprimera en fonction de J et C.

C.I.2. On modélise les frottements par un couple supplémentaire  $\vec{\Gamma}_f = -f\dot{\theta}\vec{u}_z$  qui s'exerce sur le solide, avec  $\vec{u}_z$  vecteur unitaire porté par l'axe (Oz) et orienté comme celui-ci.

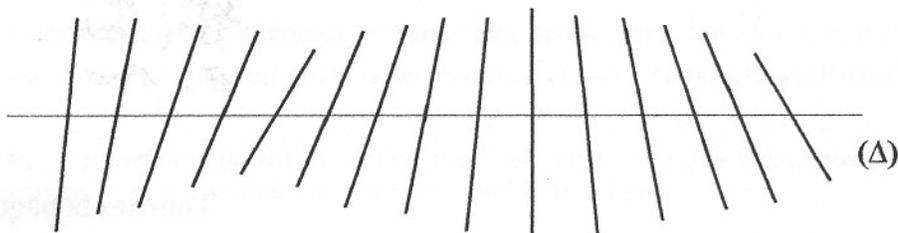
C.I.2.a) Écrire la nouvelle équation différentielle vérifiée par  $\theta$ .

C.I.2.b) Effectuer une discussion sur f pour déterminer la nature du régime obtenu lors du retour du système vers sa position d'équilibre. Dans chaque cas, nommer le régime obtenu et donner l'expression générale de la solution correspondante pour  $\theta(t)$ . On ne cherchera en aucun cas à déterminer les constantes d'intégration.

C.I.3. Proposer des exemples empruntés à la vie courante dans lesquels des systèmes effectuent de telles oscillations mécaniques autour d'un axe. Donner un exemple de système pour lequel on voudrait voir les oscillations aussi peu amorties que possible, et un autre où l'amortissement est recherché. Dans le second cas, quel régime de retour à l'équilibre vous semble préférable ?

##### C.II. ONDOSCOPE

Un dispositif utilisé dans les lycées pour mettre en évidence la notion d'onde progressive ou stationnaire est l'ondoscope, qui est une association de tiges régulièrement espacées et couplées par un fil de torsion horizontal. Par construction de l'appareil, les tiges restent perpendiculaires au fil de torsion. Les tiges peuvent tourner autour de l'axe fixe ( $\Delta$ ) horizontal qui passe par leur centre. L'axe ( $\Delta$ ) est confondu avec le fil de torsion. On note  $J_\Delta$  le moment d'inertie d'une tige par rapport à l'axe ( $\Delta$ ).



les tiges restent perpendiculaires au fil de torsion

On note  $C$  la constante de torsion de chaque portion du fil de torsion qui est comprise entre deux tiges consécutives.

On indice par  $n$  l'ordre d'une tige sur l'axe  $(\Delta)$ .

On définit la situation " de repos " de l'ondoscope de la façon suivante :

- la torsion du fil est nulle sur chacune de ses portions. Par conception de l'ondoscope, toutes les tiges sont alors coplanaires ;

- le plan qui contient alors toutes les tiges garde une direction fixe dans le référentiel d'étude qu'est le laboratoire.

On note  $\theta_n$  l'écart angulaire de la tige  $n$  par rapport à sa position " au repos ".

On néglige l'influence des frottements.

C.II.1. Établir que l'équation différentielle vérifiée par le pendule  $n$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\ddot{\theta}_n = -\Omega^2 (2\theta_n - \theta_{n+1} - \theta_{n-1}).$$

Exprimer  $\Omega$  en fonction de  $J_\Delta$  et  $C$ . On supposera que le pendule  $n$  n'est pas situé à une extrémité de l'échelle.

C.II.2. Soit  $a$  la distance constante qui sépare deux tiges consécutives sur l'axe  $(\Delta)$ . On choisit l'origine des abscisses sur l'axe de sorte que l'abscisse sur  $(\Delta)$  du  $n^{\text{ième}}$  pendule a pour expression  $x_n = na$ .

On cherche pour les élongations des solutions de la forme  $\theta_n(t) = A \cos(kna - \omega t)$ ,  $k$  et  $\omega$  étant des réels,  $\omega$  étant positif.

C.II.2.a) À quoi correspondent les solutions de ce type ? On pourra distinguer les situations où  $k$  est positif et où  $k$  est négatif.

C.II.2.b) On pose  $\theta_n = A \exp[j(kna - \omega t)]$ , avec  $j^2 = -1$ . En reportant les expressions de  $\theta_n$ ,  $\theta_{n-1}$  et  $\theta_{n+1}$  dans l'équation différentielle établie à la question C.II.2, établir l'équation de dispersion donnant  $\omega$  en fonction de  $\Omega$ , de  $a$  et de  $k$ .

C.II.2.c) Quel est le domaine accessible aux valeurs de  $\omega$  ?

C.II.2.d) À quelle amplitude peut-on restreindre les variations de  $k$ , et pourquoi ?

C.II.2.e) Tracer la courbe représentant les variations de  $\omega$  en fonction de  $k$ . La variable  $k$  décrira l'intervalle centré en 0 et de largeur l'amplitude déterminée à la question précédente.

C.II.3. L'ondoscope n'étant pas infini, quel problème se pose si l'on veut exposer à une classe des oscillations répondant à la fonction  $\theta_n(t) = A \cos(kna - \omega t)$  ? Comment procéder pour résoudre cette difficulté ?

C.II.4. L'ondoscope comporte  $N + 1$  tiges, numérotées de 0 à  $N$ . Dans cette question et cette question seulement, on bloque les tiges numéro 0 et  $N$ , de sorte que  $\theta_0 = \theta_N = 0$ .

On cherche les solutions pour  $\theta_n(t)$  sous la forme :

$$\theta_n(t) = A \cos(kna - \omega t) + B \cos(kna + \omega t + \phi),$$

avec  $k$  et  $\omega$  réels positifs.

**Tournez la page S.V.P.**

C.II.4.a) À quoi correspondent physiquement chacune des deux composantes de  $\theta_n$  ?

C.II.4.b) Utiliser la condition limite portant sur  $\theta_0$  pour donner la valeur de  $\phi$  et la relation entre A et B.

C.II.4.c) On veut écrire  $\theta_n(t)$  sous la forme  $\theta_n(t) = f(t) g(na)$ . Expliciter les fonctions  $f(t)$  et  $g(na)$ . Préciser la nature des ondes harmoniques qui peuvent alors exister.

C.II.4.d) Utiliser la condition limite portant sur  $\theta_N$  pour déterminer les valeurs possibles de  $k$ . Exprimer ces valeurs de  $k$  en fonction d'un entier relatif  $p$ . Combien de ces valeurs de  $k$  sont situées dans l'intervalle utile défini au C.II.2.d) ?

C.II.4.e) L'équation de dispersion établie à la question C.II.2.b) est-elle toujours valable ? Pourquoi ? Donner les valeurs de  $\omega$  correspondant aux valeurs possibles de  $k$ .

C.II.4.f) Décrire les oscillations de l'ondoscope pour  $p = 1, 2, 3$  et  $N$  ( $N > 3$ ). Sur l'exemple de  $N = 10$ , tracer  $\theta_n$  en fonction de  $n$  à un instant d'élongation maximale pour la tige  $n^{\circ}1$ . On demande un tracé pour chaque valeur de  $p$  mentionnée ci-dessus.

C.II.5. On continue de supposer le système non amorti.

C.II.5.a) Nommer les différentes contributions à l'énergie mécanique totale de l'ondoscope. Le système évoluant sans excitation extérieure, que peut-on dire de l'énergie mécanique totale du système ?

C.II.5.b) La tige  $N$  est maintenue bloquée. On appelle pulsations propres de l'ondoscope les pulsations déterminées à la question C.II.4.e). Qu'observerait-on si l'on débloquent la tige 0 et qu'on l'excitait avec une pulsation égale à l'une des pulsations propres ?

C.II.6. Est-ce bien ce que l'on observe dans la réalité en réalisant l'expérience précédemment décrite ? Pourquoi ?

C.II.7. Comment pourrait-on procéder pour mettre en évidence les phénomènes de réflexion et de transmission liés à un changement du milieu de propagation ? Avec quelle autre domaine de la physique proposeriez-vous une analogie ?

PARTIE D. FIBRES OPTIQUES

La transmission de l'information recourt de plus en plus souvent aux fibres optiques. Celles-ci se répartissent en deux grandes catégories : les fibres à saut d'indice et les fibres à gradient d'indice. Cette partie se propose de comparer certaines performances de ces deux types de fibres.

Dans cette partie, la célérité de la lumière dans le vide est notée  $c$ . Sa valeur numérique est censée être connue du candidat, et n'est pas rappelée.

D.I. PRÉLIMINAIRES

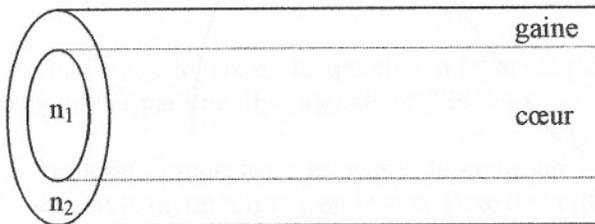
D.I.1. Donner la définition de l'indice de réfraction d'un milieu transparent. Qu'est-ce qu'un dioptre ?

D.I.2. Énoncer les lois de Descartes de la réfraction.

D.I.3. Au moyen de figures claires, exposer les différentes situations que l'on peut observer lors de la réfraction d'un rayon lumineux traversant un dioptre plan. Préciser selon les cas les conditions d'existence du rayon réfracté.

D.II. FIBRES À SAUT D'INDICE

Les fibres à saut d'indice sont constituées d'un cœur cylindrique d'indice  $n_1$  et de rayon  $a$ , entouré d'une gaine d'indice  $n_2$ .

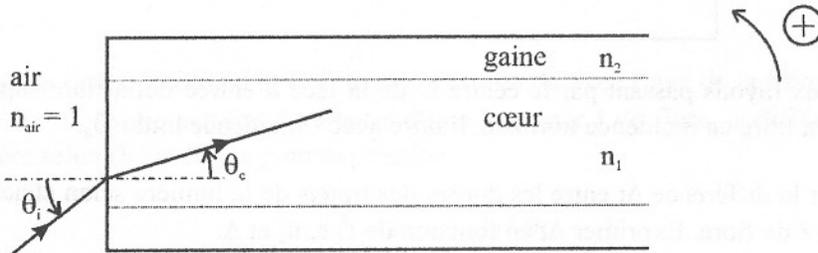


Un rayon est guidé par la fibre s'il subit des réflexions totales à chaque fois qu'il rencontre le dioptre cœur-gaine.

D.II.1. Quelle condition doivent vérifier les indices  $n_1$  et  $n_2$  pour que le guidage soit possible ?

Dans la suite du problème, on supposera cette condition satisfaite. On définit la grandeur  $\Delta$  par  $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2 n_1^2}$ . Dans les applications numériques, on prendra  $n_1 = 1,5$  et  $\Delta = 1,0 \cdot 10^{-2}$ .

D.II.2. On s'intéresse à l'ouverture angulaire d'un faisceau susceptible d'être guidé.

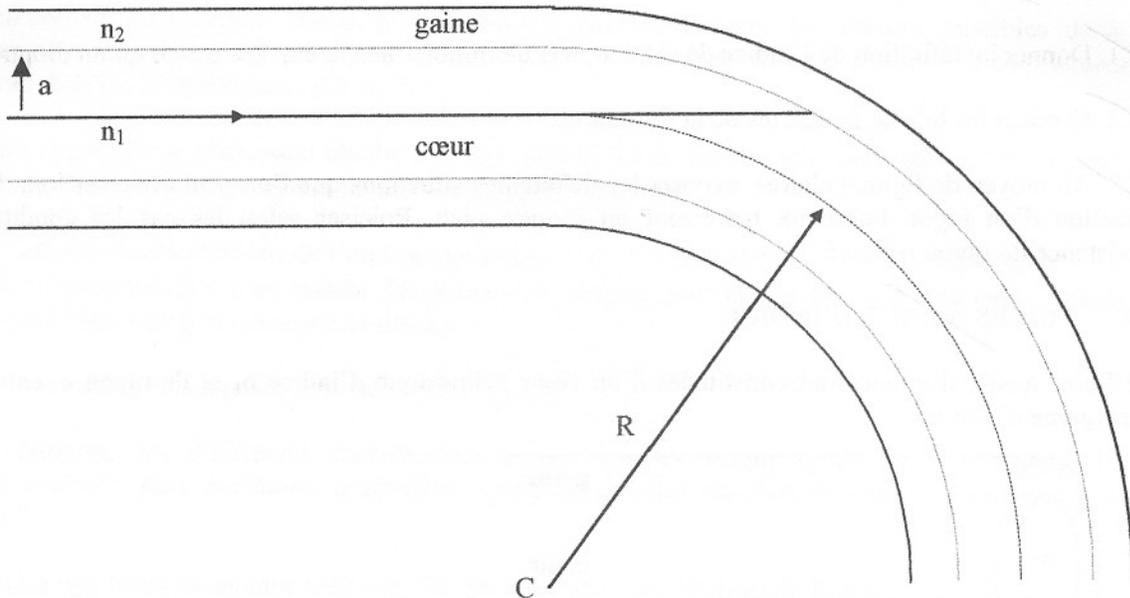


Pour cela, on considère un rayon incident situé dans un plan méridien de la fibre (voir figure ci-dessus). Ce rayon tombe sur le dioptre air-cœur avec un angle d'incidence  $\theta_i$ . On note  $\theta_c$  l'angle de réfraction correspondant.

D.II.2.a) Pour que ce rayon soit guidé par le cœur de la fibre, montrer que  $\theta_i$  doit rester inférieur à un angle limite  $\theta_a$  que l'on calculera en fonction de  $n_1$  et de  $\Delta$ .

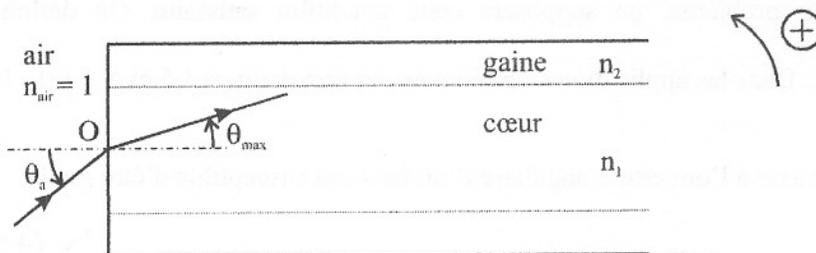
D.II.2.b) On appelle ouverture numérique la quantité notée O.N. définie par  $O.N. = \sin \theta_a$ . Calculer l'ouverture numérique de la fibre.

D.II.3. Le guidage des rayons peut être confronté à un premier problème, lorsque la fibre cesse d'être rectiligne pour prendre des courbures imposées par son utilisation pratique. Pour déterminer un ordre de grandeur de la courbure acceptable par une fibre à saut d'indice, on envisage un rayon confondu avec l'axe du cœur dans la partie rectiligne de la fibre.



Déterminer la valeur limite  $R_m$  de  $R$  pour que le rayon envisagé reste effectivement guidé. Exprimer  $R_m$  en fonction du rayon du cœur  $a$  et de  $\Delta$ . Faire l'application numérique, en prenant  $a = 25 \mu\text{m}$ .

D.II.4. Un autre problème que pose l'utilisation des fibres optiques est l'étalement des impulsions. Ces impulsions correspondent au codage binaire de l'information numérisée qui est échangée au moyen de ces fibres.



On considère deux rayons passant par le centre  $O$  de la face d'entrée de la fibre supposée rectiligne. L'un entre dans la fibre en incidence normale, l'autre avec l'incidence limite  $\theta_a$ .

D.II.4.a) Calculer la différence  $\Delta t$  entre les durées des trajets de la lumière selon chacun de ces rayons sur une longueur  $\ell$  de fibre. Exprimer  $\Delta t$  en fonction de  $\ell$ ,  $c$ ,  $n_1$  et  $\Delta$ .

D.II.4.b) Calculer numériquement  $\Delta t$  en prenant  $\ell = 1 \text{ km}$ .

D.II.4.c) Quelle durée  $\tau$  doit séparer deux impulsions successives pour qu'elles ne se superposent pas à la sortie de la fibre ? En déduire une valeur limite  $D_m$  pour le débit de la ligne, exprimé en bit / s.

D.III. FIBRES À GRADIENT D'INDICE

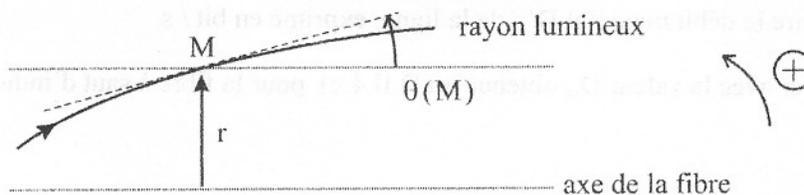
Pour remédier à ce problème d'élargissement des impulsions, et augmenter le débit des fibres optiques, on utilise des fibres à gradient d'indice, où l'indice  $n$  du cœur varie continûment en fonction de la distance à l'axe  $r$ .

On limitera notre étude à des rayons passant par le centre  $O$  de la face d'entrée de la fibre supposée rectiligne.

D.III.1. Pour qu'il y ait effectivement guidage, l'indice  $n(r)$  doit-il être une fonction croissante ou décroissante de  $r$  ?

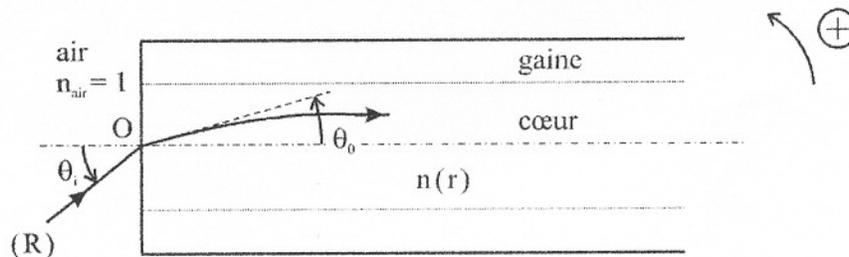
On pourra considérer que le cœur est en fait constitué d'un grand nombre de couches très minces dont les indices varient très peu d'une couche à la suivante.

D.III.2. On appelle  $\theta(M)$  l'angle entre la tangente au rayon en  $M$  et la direction de l'axe de la fibre.



Justifier que dans le cœur, la quantité  $n(r) \cos \theta(M)$  reste constante. Donner l'allure des rayons lumineux guidés par une fibre à gradient d'indice.

D.III.3. Le point  $O$  représente le centre du cœur sur la face d'entrée de la fibre. On pose  $\theta(O) = \theta_0$  l'angle que fait le rayon réfracté en  $O$  avec l'axe de la fibre.



On prend les valeurs numériques suivantes :  $n_0 = 1,5$  et  $\theta_i = 12^\circ$ .

D.III.3.a) Calculer  $\theta_0$ .

D.III.3.b) Soit  $(R)$  le rayon précédent et  $(R_0)$  le rayon confondu avec l'axe de la fibre.  $(R_0)$  correspond donc à un angle  $\theta_i = 0$ . D'une extrémité à l'autre d'une longueur  $\ell$  de fibre, la différence de durée de trajet de la lumière selon  $(R)$  et  $(R_0)$  a pour expression :

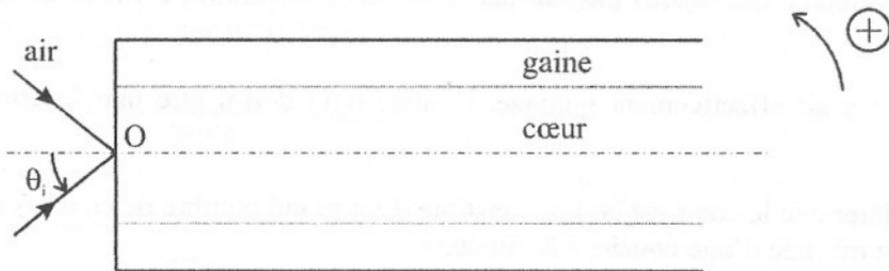
$$\Delta t' = \frac{n_0 \ell}{c} \left( \frac{1}{\cos \theta_0} - \frac{\sin^2 \theta_0}{2 \cos \theta_0} - 1 \right)$$

Remarque : cette expression, que l'on admet ici sans démonstration, correspond à une fibre dont

l'indice varie selon la loi :  $n(r) = n_0 \sqrt{1 - 4 \Delta \left(\frac{r}{a}\right)^2}$ .

Tournez la page S.V.P.

Calculer l'étalement  $\Delta t'$  d'une impulsion à l'extrémité de la fibre à gradient d'indice, en prenant la longueur  $\ell$  égale à 1 km. On supposera que sur la face d'entrée de la fibre, le faisceau incident converge en O et admet comme ouverture angulaire le demi-angle au sommet  $\theta_i = 12^\circ$ .



D.III.3.c) En déduire le débit maximal  $D'_m$  de la ligne, exprimé en bit / s.

D.III.3.d) Comparer avec la valeur  $D_m$  obtenue au D.II.4.c) pour la fibre à saut d'indice et conclure.