

# CAPES de sciences physiques

## Concours externe

### SECTION PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de physique avec applications - Session : 2000

#### A OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES

##### A.I. Oscillations électriques forcées.

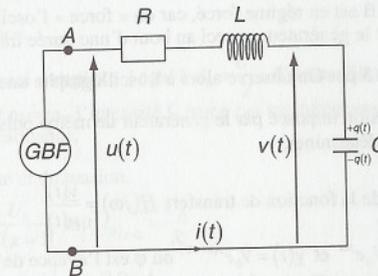


Figure 1

##### A.I.1. Étude de la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur de capacité $C$ .

A.I.1.a. Relations entre  $v(t)$  et  $q(t)$ , et entre  $i(t)$  et  $q(t)$ .

D'après les conventions indiquées sur le schéma,

- la définition de la capacité  $C = \frac{q(t)}{v(t)}$  donne  $v(t) = \frac{1}{C} q(t)$

- la définition de l'intensité du courant  $i$  s'écrit  $i = -\frac{dq(t)}{dt}$ .

A.I.1.b. Calcul de la valeur des grandeurs  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q_0 = \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}}$ .

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \text{A.N.} : \frac{1}{\sqrt{0,04 \times 22 \cdot 10^{-9}}} = 33,709 \cdot 10^3 \text{ soit } \omega_0 = 34 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$Q_0 = \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}} \cdot \text{A.N.} : \frac{\sqrt{0,04}}{135 \sqrt{22 \cdot 10^{-9}}} = 9,988 \text{ soit } Q = 10$$

A.I.1.c. Équation différentielle vérifiée par la tension  $v(t)$ .

La loi des tensions appliquée au schéma électrique ci-dessus donnent :

$u(t) = v_R(t) + v_L(t) + v(t)$  avec compte tenu des expressions la question A.I.1.a et

- de la définition de la résistance ohmique en convention générateur  $v_R(t) = -R \cdot i(t)$

- de la définition de l'auto-inductance en convention générateur  $v_L(t) = -L \frac{di(t)}{dt}$

On en tire  $v_R(t) = RC \cdot \frac{dv(t)}{dt}$  et  $v_L(t) = LC \frac{d^2v(t)}{dt^2}$

puis l'équation différentielle :  $\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v(t) = \frac{1}{LC} u(t)$ .

Avec les expressions de  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q_0 = \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}}$  puis  $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ ,  $\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q_0}$  et  $\omega_0 Q_0 = \frac{1}{RC}$ ,

cette équation différentielle prend la forme :  $\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_0} \frac{dv(t)}{dt} + \omega_0^2 v(t) = \omega_0^2 u(t)$ .

### A.I.2. Étude du régime forcé.

#### A.I.2.a. Le dipôle AB en régime forcé.

Le dipôle AB est en régime forcé, car on « force » l'oscillateur AB à osciller à la fréquence imposée par le générateur et ceci au bout d'une durée transitoire très courte de l'ordre de  $5\tau$

soit  $\frac{5}{\omega_0 Q_0} \cong 3 \mu\text{s}$ . On observe alors à l'oscillographe une sinusoïde  $v(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$  c'est-à-dire la tension imposée par le générateur de même pulsation mais avec un déphasage  $\varphi$  que nous allons déterminer.

#### A.I.2.b. Expression de la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{v(t)}{u(t)}$

Soit  $u(t) = U_0 e^{j\omega t}$  et  $v(t) = V_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$  où  $\varphi$  est l'avance de phase de  $v(t)$  sur la tension  $u(t)$ . La dérivation temporelle de  $v(t)$  se traduit en notation complexe par la multiplication par  $j\omega$ . La

fonction de transfert se déduit de l'équation différentielle :  $-\omega^2 v + j \frac{\omega_0}{Q_0} \omega v + \omega_0^2 v = \omega_0^2 u$  soit

$$\left( \omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0}{Q_0} \omega \right) v = \omega_0^2 u$$

En posant  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , on obtient  $\left( 1 - x^2 + j \frac{x}{Q_0} \right) v = u$  et la fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{v}{u} = \frac{Q_0}{1 - x^2 + jx}$$

#### A.I.2.c. Calcul du déphasage $\varphi$ entre $u(t)$ et $v(t)$

Le déphasage  $\varphi$  est directement relié à l'argument de  $H$  soit

$\text{Arg}(H) = \text{Arg}(Q_0) - \text{Arg}(Q_0(1 - x^2 + jx))$ .  $Q_0$  étant réel, on obtient  $\varphi = -\text{Arg}(Q_0(1 - x^2 + jx))$

soit  $\varphi = \arctan \left( -\frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{Q_0(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)} \right)$ . On a d'après les données  $x = \frac{\omega}{\omega_0} < 1$  donc  $\varphi$  est négatif est

$v(t)$  est donc en retard sur  $u(t)$ .

$$\text{A.N. : } \arctan \left( -\frac{\frac{31500/33709}{9,988(1 - (\frac{31500/33709})^2)}} \right) = -36,428 \text{ soit } \varphi = -36,5^\circ.$$

### A.I.3. Étude de la résonance en intensité.

#### A.I.3.a. L'impédance du dipôle AB

Par l'utilisation de la loi d'ohm généralisé sous sa forme complexe, l'impédance complexe du

dipôle AB s'écrit :  $Z = R + jL\omega - j \frac{1}{C\omega}$  soit  $Z = R \left( 1 + j \left( \frac{L}{R} \omega - \frac{1}{RC\omega} \right) \right)$ . Compte tenu des

expressions  $\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q_0}$ ,  $\omega_0 Q_0 = \frac{1}{RC}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  on obtient finalement  $Z = R \left( 1 + jQ_0 \left( x - \frac{1}{x} \right) \right)$  de

$$\text{module } Z = R \sqrt{1 + Q_0^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}.$$

$$\text{A.N. : } 135 \sqrt{1 + 9,988^2 \left( \frac{31500}{33709} - \frac{33709}{31500} \right)^2} = 227,489. \text{ Soit } Z = 227 \Omega$$

#### A.I.3.b. Condition de résonance.

Le module de l'intensité complexe  $i$  égal à  $I_0 = \frac{U_0}{Z}$ . Comme  $Z(\omega)$  passe par un minimum pour  $x = 1$  donc pour  $\omega = \omega_0$ , l'intensité  $I_0$  passe par un maximum pour cette valeur  $\omega = \omega_0$ , on se trouve alors à la résonance.

#### A.I.3.c. Résonance d'intensité et de tension.

On a donc  $I_0|_{x=1} = \frac{U_0}{Z(x=1)}$  soit  $I_0|_{x=1} = \frac{U_0}{R}$ .

$$\text{A.N. : } \frac{5,4}{135} = 0,04 \text{ soit } I_0|_{x=1} = 0,04 \text{ A}$$

À la résonance  $v(t) = j \frac{1}{C\omega_0} i(t)$  soit  $v(t) = j \frac{1}{RC\omega_0} u(t)$  et donc en module  $V_0 = \frac{1}{RC\omega_0} U_0$  ou

$$V_0 = QU_0.$$

$$\text{A.N. : } 9,988 \times 5,4 = 53,935 \text{ soit } V_0 = 54 \text{ V.}$$

#### A.I.3.d. La bande passante

On appelle bande passante à -3dB, le domaine de pulsation tel que l'atténuation

$$A = 20 \log_{10} \frac{I_0(\omega)}{I_{0\text{max}}} \text{ soit supérieure à } -3\text{dB. Soit } 20 \log_{10} \frac{I_0(\omega)}{I_{0\text{max}}} \geq -3 \text{ et } \frac{I_0(\omega)}{I_{0\text{max}}} \geq 10^{-\frac{3}{20}} \text{ soit}$$

$$\text{approximativement } I_0(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} I_{0\text{max}}.$$

La largeur  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  où  $\omega_2, \omega_1$  sont les pulsations de coupures, c'est-à-dire les valeurs de  $\omega$

pour lesquelles  $I_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{0\text{max}}$ . En effet  $\frac{U_0}{Z(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{U_0}{R}$  soit  $Z(\omega) = R\sqrt{2}$  soit par

identification à l'expression de  $Z(\omega) = R \sqrt{1 + Q_0^2 \left( x - \frac{1}{x} \right)^2}$  on a  $Q_0 \left( x - \frac{1}{x} \right) = \pm 1$ . On a donc

deux équations du second degré dont la résolution donne pour les solutions positives

(physiquement acceptable) :  $\frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{\sqrt{4Q_0^2 + 1} + 1}{2Q_0}$  et  $\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{\sqrt{4Q_0^2 + 1} - 1}{2Q_0}$ . Soit

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}.$$

$$\text{A.N. : } \frac{33709}{9,988} = 3374,9 \text{ soit } \Delta\omega = 3375 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$  caractérise l'acuité de résonance. Plus la largeur de bande  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$  relative à  $\omega_0$  est petite (résonance aiguë) plus le facteur de qualité  $Q_0$  est élevé.

**A.II. Étude des oscillations électriques libres.**

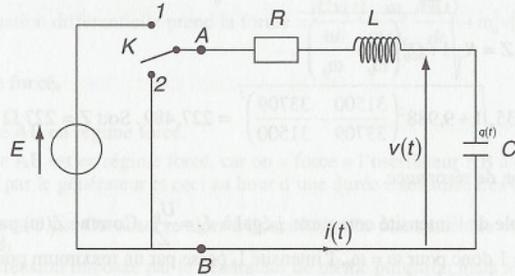


Figure 2

**A.II.1. L'équation différentielle vérifiée par la tension  $v(t)$ .**

En fait il s'agit de la même situation que dans la question A.I.1.c avec  $u(t) = 0$ . Soit

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_0} \frac{dv(t)}{dt} + \omega_0^2 v(t) = 0$$

**A.II.2. Les conditions initiales de la décharge du condensateur.**

L'énergie électrique  $W_e$  d'un condensateur est une fonction dérivable du temps.  $\frac{dW_e}{dt} = P_{elec}$ .  $W_e(t)$  est donc aussi continue, ainsi que  $u_c(t)$ . Dans le cas présent, il en résulte  $u_c(O^+) = u_c(O^-) = E$ . De même, l'énergie magnétique  $\frac{1}{2} Li^2$  de la bobine est continue car dérivable. Ce qui impose  $i(O^+) = i(O^-) = 0$ .

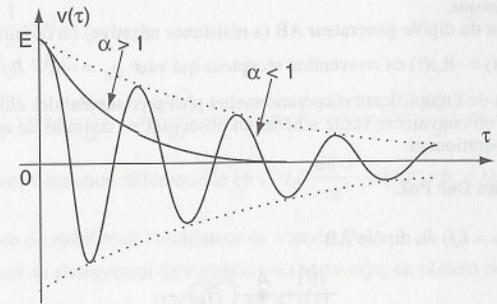
**A.II.3. L'équation différentielle réduite vérifiée par la tension  $v(\tau)$**

En posant  $\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}$  (ou  $t = \frac{1}{\omega_0} \tau$ ),  $\alpha = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$  (ou  $\alpha = \frac{1}{2Q_0}$ ), on obtient pour chacun des termes de

l'équation différentielle :  $\frac{d^2v(t)}{dt^2} = \omega_0^2 \frac{d^2v(\tau)}{d\tau^2}$ ,  $\frac{\omega_0}{Q_0} \frac{dv(t)}{dt} = \frac{\omega_0^2}{Q_0} \frac{dv(\tau)}{d\tau}$  et  $\omega_0^2 v(t)$ . Soit en simplifiant par  $\omega_0^2 \neq 0$ , on obtient  $\frac{d^2v(\tau)}{d\tau^2} + \frac{1}{Q_0} \frac{dv(\tau)}{d\tau} + v(\tau) = 0$  soit  $\frac{d^2v(\tau)}{d\tau^2} + 2\alpha \frac{dv(\tau)}{d\tau} + v(\tau) = 0$ .

**A.II.4. Deux régimes principaux d'évolution de la tension  $v(\tau)$ .**

Les solutions de l'équation différentielle réduite sont de la forme  $v(\tau) = Ve^{r\tau}$  où  $r$  est solution de l'équation caractéristique  $r^2 + 2\alpha r + 1 = 0$ . Le discriminant réduit vaut  $\Delta' = \alpha^2 - 1$ . L'étude du signe du discriminant réduit laisse apparaître deux principaux régimes d'évolution de la tension  $v(\tau)$ .  
Premier cas :  $\Delta' > 0$ , alors  $\alpha > 1$  ( $\alpha$  est physiquement positif). Les solutions de l'équation caractéristique sont réelles et l'on observe un régime apériodique (cf graphe ci-après)  
Second cas :  $\Delta' < 0$ , alors  $\alpha < 1$  ( $\alpha$  est physiquement positif). Les solutions de l'équation caractéristique sont complexes et l'on observe un régime oscillatoire amorti pseudo périodique (cf. graphe ci-après)



**A.II.5. Le régime critique**

On passe d'un régime à l'autre dans le troisième cas c'est-à-dire lorsque  $\Delta' = 0$  soit  $\alpha = 1$ . D'après

l'expression de  $\alpha$ , la résistance du circuit vaut :  $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ . Cette valeur particulière de résistance (difficile à atteindre expérimentalement) est la résistance critique sous-entendu limite du passage entre les deux régimes.

A.N. :  $2\sqrt{\frac{0,04}{22.10^{-9}}} = 2,6967.10^3$  soit  $R_c = 2,7.10^3 \Omega$ .

**A.III. Oscillations électriques entretenues.**

**A.III.1. Résistance négative.**

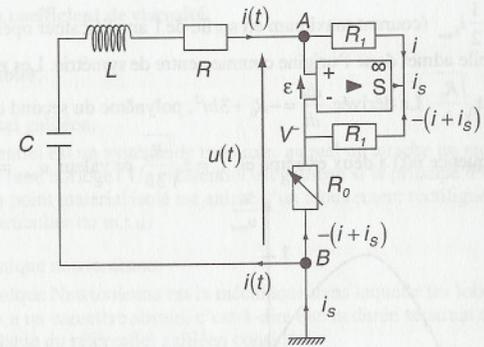


Figure 3

On a dans la maille ASB :  $u = R_1 i + (R_1 + R_0)(i + i_s)$ . De même dans la maille ASV :

$$\epsilon = R_1(i + i_s) + R_1 i. \text{ Mais } \epsilon = 0 \text{ implique } -2R_1 i = R_1 i_s \text{ soit } -i_s = 2i \text{ donc } u = R_1 i + (R_1 + R_0)(-i) \text{ soit } u = -R_0 i.$$

La puissance instantanée dissipée dans le dipôle RLC vaut  $p(t) = u(t).i(t) = Ri^2(t)$  (c'est le seul élément dissipatif du circuit).

L'équation différentielle du circuit RLC ;  $\frac{d^2v(\tau)}{d\tau^2} + 2\alpha \frac{dv(\tau)}{d\tau} + v(\tau) = 0$  avec  $\alpha = \frac{R - R_0}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$  devient

$$\frac{d^2v(\tau)}{d\tau^2} + v(\tau) = 0 \text{ si l'on choisit } R_0 = R. \text{ On retrouve dans ce cas l'équation différentielle d'un}$$

oscillateur harmonique.

L'énergie provient du dipôle générateur AB (à résistance négative) en fait un générateur de caractéristique  $u(t) = -R_0 i(t)$  en convention récepteur qui vaut  $p_G = -ui = R_0 i^2$ . Comme  $|i| = \frac{1}{2}|i_s|$

l'énergie provient de l'amplificateur opérationnel et plus précisément des alimentations de l'AO. On peut facilement s'en convaincre sur le schéma en observant les courants de masse et de sortie de l'amplificateur opérationnel.

### A.III.2. Oscillateur de Van Der Pol

#### A.III.2.a. Modèle $u = f(i)$ du dipôle AB

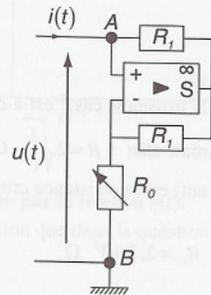
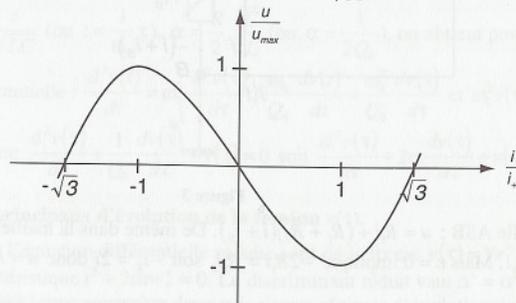


Figure 4

Étude de la fonction en supposant  $b > 0$ . Le domaine de définition est tel que  $i$  ne doit pas dépasser  $\frac{1}{2} i_{s_{\max}}$  (courant maximum en sortie de l'amplificateur opérationnel). La fonction est impaire, elle admet donc l'origine comme centre de symétrie. Les zéros de la fonction sont :  $i = 0$ ,  $i = \pm \sqrt{\frac{R_0}{b}}$ . La dérivée  $\frac{du}{dt} = -R_0 + 3bi^2$ , polynôme du second degré, admet deux zéros.

En conséquence  $u(t)$  a deux extréma en  $i_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{R_0}{3b}}$  de valeur  $u_{\max} = -u_{\min} = \frac{2}{3} R_0 \sqrt{\frac{R_0}{3b}}$ .



#### A.III.2.b. L'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i(t)$ .

Par application de la loi des mailles on a  $u(t) = v_R(t) + v_L(t) + v(t)$  avec

$$-v_R(t) = -R \cdot i(t),$$

$$-v_L(t) = -L \frac{di(t)}{dt},$$

$$-v(t) = \frac{1}{C} q(t) \text{ et}$$

$$-u = -R_0 i + b i^3.$$

$$\text{Soit } \frac{du(t)}{dt} = -L \frac{di(t)^2}{dt^2} - R \frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{C} i(t) = -R_0 \frac{di(t)}{dt} + 3bi^2 \frac{di(t)}{dt} \text{ et}$$

$$\text{finalement l'équation différentielle en } i : LC \frac{di(t)^2}{dt^2} + C(R - R_0 + 3bi^2) \frac{di(t)}{dt} + i(t) = 0$$

#### A.III.2.c. Condition de stabilité de l'oscillateur de Van der Pol.

Procédons au changement de variable  $x = i$  et  $t = \omega_0^2 \tau$ , on obtient pour chacun des termes de

$$\text{l'équation différentielle } \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 i(t)}{dt^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} \frac{d^2 x(\tau)}{d\tau^2},$$

$$C(R - R_0 + 3bi^2) \frac{di(t)}{dt} = \omega_0 C(R - R_0) \left(1 + \frac{3b}{R - R_0} x^2\right) \frac{dx(\tau)}{d\tau} \text{ et } x(\tau). \text{ On obtient}$$

$$\frac{d^2 x(\tau)}{d\tau^2} - \alpha(1 - \beta x^2) \frac{dx(\tau)}{d\tau} + x(\tau) = 0 \text{ avec par identification } \alpha = (R_0 - R) \sqrt{\frac{C}{L}} \text{ et } \beta = \frac{3b}{R_0 - R}.$$

$$\text{(Rem : on peut écrire } \alpha = (R_0 - R) \frac{1}{RQ_0} \text{ et } \alpha\beta = \frac{3b}{RQ_0}).$$

La condition de stabilité de l'oscillateur, à savoir  $\beta \geq 0$ , se traduit donc par  $R_0 \geq R$

## B OSCILLATIONS MÉCANIQUES

### B.I. Détermination d'un coefficient de viscosité.

#### B.I.1. Questions préalables.

##### B.I.1.a. Référentiel galiléen.

Un référentiel est un système de trois axes auquel on attache un repère d'espace et un repère temporel (une horloge). Un référentiel est galiléen si le principe d'inertie y est vérifié, c'est-à-dire si un point matériel isolé est animé d'un mouvement rectiligne uniforme (le repos étant un cas particulier du m.r.u)

##### B.I.1.b. La mécanique newtonienne.

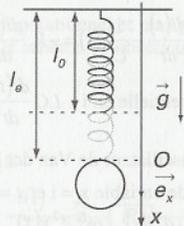
La mécanique Newtonienne est la mécanique dans laquelle les lois de Newton sont vérifiées. Le temps a un caractère absolu, c'est-à-dire que la durée séparant deux événements est indépendante du référentiel galiléen considéré.

##### B.I.1.c. Un fluide parfait.

Un fluide parfait est un fluide pour lequel les contraintes sont toujours normales aux surfaces délimitant le volume accessible au fluide. L'absence de composante tangentielle traduit simplement l'absence de viscosité et l'écoulement du fluide se fait alors sans dissipation d'énergie.

**B.I.2. Expérience dans l'air.**

B.I.2.a. Expression de l'allongement du ressort à l'équilibre.



Soit le système {bille} immobile dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :  $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ . La bille n'est soumise qu'à son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  et à la force de rappel exercée par le ressort :  $\vec{F}_r = -k(l - l_0)\vec{e}_x$  si on néglige la poussée d'Archimède exercée par l'air.

À l'équilibre pour  $l = l_e$  on a donc :  $m\vec{g} - k(l_e - l_0)\vec{e}_x = \vec{0}$ . On projetant cette relation sur la verticale descendante Ox, on obtient  $mg - k(l_e - l_0) = 0$  soit finalement  $l_e - l_0 = \frac{mg}{k}$  ou en

fonction des données du problème :  $l_e - l_0 = \frac{g}{k} \mu_1 \frac{4}{3} \pi R^3$ .

A.N.  $\frac{9,81}{3} 2700 \frac{4}{3} \pi (1.10^{-2})^3 = 36,98.10^{-3}$  soit  $l_e - l_0 = 3,7$  cm.

B.I.2.b. Caractéristiques des oscillations.

D'après la conservation de l'énergie mécanique du système {bille} dans le champ de pesanteur (champ de force conservatif) et soumis à la force de rappel du ressort (force conservative) nous avons :  $E_m = E_c + E_{pp} + E_{pr}$ . L'énergie potentielle de pesanteur est telle que  $\vec{P} = -\text{grad}E_{pp}$  tandis que l'énergie potentielle élastique est telle que  $\vec{F}_r = -\text{grad}E_{pr}$ .

Prenons comme origine des positions la position d'équilibre et notons  $x = l - l_e$ .

L'énergie potentielle de pesanteur vérifie :  $mg = -\frac{dE_{pp}}{dx}$  d'où  $\int_{E_{pp}(0)}^{E_{pp}(x)} dE_{pp} = -\int_0^x mg dx'$  soit

$E_{pp}(x) - E_{pp}(0) = -mgx$ . En prenant  $E_{pp}(l = l_e) = E_{pp}(x = 0) = 0$ , on a  $E_{pp}(x) = -mgx$ .

Pour l'énergie potentielle élastique, on a  $-k(l - l_0) = -\text{grad}E_{pr}$  soit

$-k(x + l_e - l_0) = -\text{grad}E_{pr}$  soit  $-k(x + l_e - l_0) = -\frac{dE_{pr}}{dx}$  d'où  $\int_{E_{pr}(0)}^{E_{pr}(x)} dE_{pr} = \int_0^x k(x + l_e - l_0) dx'$

soit  $E_{pr}(x) - E_{pr}(0) = \frac{1}{2} kx^2 + k(l_e - l_0)x$  en prenant  $E_{pr}(l = l_e) = E_{pr}(x = 0) = 0$  on a

$E_{pr}(x) = \frac{1}{2} kx^2 + k(l_e - l_0)x$ .

L'énergie mécanique vaut donc :  $E_m = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2} kx^2 + k(l_e - l_0)x$ . Comme nous avons

montré que  $mg - k(l_e - l_0) = 0$ , il vient  $E_m = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$ . Le système étant conservatif, on a

$E_m = \text{cste}$ . On en déduit que  $\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) = 0$  soit  $\dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$ . C'est l'équation

différentielle caractéristique d'un oscillateur harmonique de la forme  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ . Par

identification, on a donc  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ .

Soit en fonction des données du problème  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\mu_1 \pi R^3}{k}}$  ou  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l - l_0}{g}}$ .

A.N. :  $2\pi \sqrt{\frac{4}{3} \frac{2700 \pi (1.10^{-2})^3}{3}} = 385,78.10^{-3}$  soit  $T_0 = 386.10^{-3}$  s.

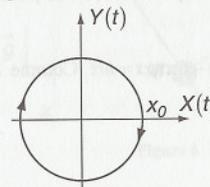
Les solutions de l'équation différentielle du mouvement sont de la forme  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$  avec les conditions initiales :  $x(0) = x_0 = 1$  cm et  $\dot{x}(0) = 0$ . On a donc  $x_0 = A \cos(\varphi)$  et  $-A\omega_0 \sin(\varphi) = 0$ . Si l'on exclut à priori la solution  $A = 0$ , on a  $\varphi = 0$  et  $A = x_0$  soit  $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ .

B.I.2.c. La trajectoire de phase.

On a donc  $X(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$  et  $Y(t) = -x_0 \sin(\omega_0 t)$ . La courbe paramétrée correspondante est donc un cercle de rayon  $x_0$  tel que  $X^2(t) + Y^2(t) = x_0^2$ .

Le sens de parcours est déduit des coordonnées du point à l'instant  $t = 0^+$  et est indiqué sur le schéma ci-dessous.

La courbe se referme, ce qui traduit l'absence de phénomènes dissipatifs.



**B.I.3. Étude dans de l'huile de viscosité  $\eta$ .**

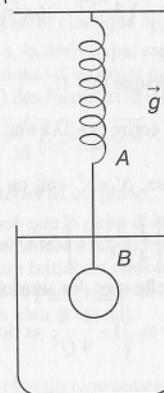


Figure 5

B.I.3.a. L'allongement du ressort dans sa position d'équilibre.

Par rapport au cas précédent la bille est soumise à une force supplémentaire, la poussée d'Archimède exercée par le fluide. C'est une force de direction verticale dirigée vers le haut, l'allongement du ressort sera donc plus petit qu'à la question B.I.2.a.

En tenant compte de la poussée d'Archimède soit  $\vec{\pi}_A = -\mu_2 \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{g}$ , on obtient à l'équilibre

l'équation :  $m \vec{g} - k(\vec{l}' - \vec{l}_0) - \mu_2 \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{g} = 0$  qui s'écrit en projection sur Ox :

$$\mu_1 \frac{4}{3} \pi R^3 g - k(l'_e - l_0) - \mu_2 \frac{4}{3} \pi R^3 g = 0 \text{ soit finalement : } l'_e - l_0 = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{g}{k} (\mu_1 - \mu_2).$$

$$\text{A.N. : } \frac{4}{3} \pi (1.10^{-2})^3 \frac{9,81}{3} (2700 - 800) = 26,02.10^{-3} \text{ soit } l'_e - l_0 = 2,60 \text{ cm.}$$

B.I.3.b. Dimension du coefficient de viscosité.

L'équation au dimension de l'équation  $\eta = \frac{f}{6\pi r v}$  indique que  $\eta$  a comme unité

$$\frac{\text{kg.m.s}^{-2}}{\text{m.m.s}^{-1}} = \text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1} \text{ soit la dimension } \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}.$$

B.I.3.c. Équation différentielle du mouvement

Nous l'avons vu, le système {bille} est soumis dans le référentiel du laboratoire à trois forces dont les expressions ont été déterminées. L'application de la relation fondamentale de la dynamique à ce système donne :

$$m \vec{g} - k(l - l_0) - \mu_2 \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{g} - 6\pi \eta r \vec{v} = m \vec{a} \text{ soit en posant } x \vec{e}_x = l - l_0 \text{ et en projetant sur l'axe}$$

Ox on obtient :

$$mg - k(x + l'_e - l_0) - \mu_2 \frac{4}{3} \pi R^3 g - 6\pi \eta r \dot{x} = m \ddot{x}. \text{ Comme } l'_e - l_0 = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{g}{k} (\mu_1 - \mu_2), \text{ il vient}$$

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0.$$

B.I.3.d. Expression de Q.

$$\text{Soit } Q = \frac{4}{3} \pi \mu_1 r^3 \sqrt{\frac{k}{4 \pi \mu_1 r^3}} \cdot \frac{1}{6\pi \eta r} = \sqrt{\frac{4 \pi \mu_1 r^3}{36 \pi^2 \eta^2 r^2}} \text{ soit } Q = \frac{1}{3\eta} \sqrt{\frac{\mu_1 k r}{3\pi}}.$$

B.I.3.e. Caractéristique du mouvement lorsque  $Q > 1$ .

• L'équation différentielle peut s'écrire  $\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$  avec  $2\lambda = \frac{h}{m}$ . Le discriminant

réduit de l'équation caractéristique,  $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$  ou  $\Delta' = \frac{h^2}{4m^2} - \omega_0^2$  peut s'écrire

$$\Delta' = \omega_0^2 \left( \frac{1}{4} \frac{h^2}{\omega_0^2 m^2} - 1 \right) \text{ ou } \Delta' = \omega_0^2 \left( \frac{1}{4} \frac{1}{Q^2} - 1 \right). \text{ Si } Q > 1 \text{ le discriminant réduit est négatif. Les}$$

solutions de l'équation différentielle sont des sinusoides amorties de la forme :

$$x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) \text{ avec } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \text{ et donc } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}.$$

• Le décrément logarithmique est donné par  $\delta = \ln \left( \frac{A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)}{A e^{-\lambda(t+T)} \cos(\omega(t+T) + \varphi)} \right)$  soit  $\delta = \lambda T$  ou

$$\delta = \frac{h}{2m} T. \text{ Comme } Q = m\omega_0 / h \text{ il vient : } \delta = \frac{1}{2} \frac{\omega_0 T}{Q}.$$

x(t) en cm	6	4,45	3,30	2,45	1,8	1,35
ln(x(t))	1,791	1,493	1,194	0,896	0,587	0,300
$\delta$		0,298	0,299	0,298	0,309	0,287

Ces valeurs permettent de supposer  $Q \gg 1$ .

$$\text{Pour } Q \gg 1, \text{ on a } T = \frac{2\pi}{\omega_0} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \cong T_0 \text{ et donc } \delta = \frac{\pi}{Q}.$$

La moyenne des valeurs de  $\delta$  est 0,298 et  $Q = 10,535$  soit  $Q \cong 10,5$  et  $\eta = \frac{1}{3Q} \sqrt{\frac{\mu_1 k r}{3\pi}}$ .

$$\text{A.N. : } \frac{1}{3 \times 10,535} \sqrt{\frac{2700 \times 3 \times 1.10^{-2}}{3\pi}} = 92,7579 \text{ soit } \eta = 92,8 \text{ Pl.}$$

## B.II. Étude d'un pendule simple.

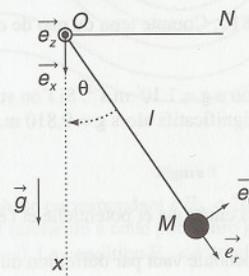


Figure 6

### B.II.1. Oscillations de faible amplitude.

B.II.1.a. Énoncé du théorème du moment cinétique appliqué à un point matériel.

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment de la quantité de mouvement (moment cinétique) d'un point matériel M par rapport à un point O fixe est égale au moment par rapport à O des forces extérieures appliquées à ce point.

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{O} = \sum \vec{OM} \wedge \vec{F}_{ext}$$

B.II.1.b. La trajectoire du point matériel M est plane.

Il n'est pas dit dans l'énoncé que le point d'attache fixe une contrainte de mouvement dans le plan. Il faut donc prendre en considération les conditions initiales du mouvement et les causes de celui-ci. L'écart angulaire initial est dans le plan xOy, il n'y a pas de vitesse initiale et enfin les forces appliquées au point matériel M sont dans le plan xOy. Donc le mouvement ne peut avoir lieu que dans un plan (xOy ici).

B.II.1.c. L'équation différentielle.

Compte tenu du caractère plan du mouvement, il est judicieux de travailler dans le repère

local  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  l'expression du moment cinétique  $\vec{L}_{O} = \vec{OM} \wedge m \vec{v}$  s'écrit

$$\vec{L}_{O} = l \vec{e}_r \wedge m l \dot{\theta} \vec{e}_\theta \text{ (sachant que } l \text{ est une constante).}$$

Exprimons la dérivée  $\frac{d\vec{L}_{O}}{dt} = m l^2 \ddot{\theta} \vec{e}_z$  ainsi que la somme des moments des forces extérieures

$\vec{l}e_x \wedge P\vec{e}_x + l\vec{e}_x \wedge (-T)\vec{e}_r$  soit  $-mgl \sin \theta \vec{e}_z$ . (Attention le sens positif choisi pour  $\theta$  est cohérent avec un sens de rotation choisi arbitrairement positif selon  $\vec{e}_z$ ). Par application du théorème ci-dessus il vient  $ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$ . Pour une élongation de petit angle ( $\sin \theta \approx \theta$ ), l'équation différentielle du second ordre devient linéaire à coefficient constant sans second membre  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ . On retrouve l'équation caractéristique d'un oscillateur harmonique de

la forme  $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ , de pulsation propre de  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

B.II.1.d. Une valeur de  $g$ .

La période propre est donnée par :  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ , soit  $g = \frac{4\pi^2}{T_0^2}l$ .

A. N. :  $\frac{4\pi^2}{\left(\frac{40,12}{20}\right)^2}l = 9,810$ . Compte tenu du peu de chiffre significatif donnée sur la longueur

(un chiffre significatif) on a  $g = 1.10^1 \text{ m.s}^{-2}$ . Si l'on suppose que la longueur est connue avec plus de quatre chiffres significatifs alors  $g = 9,810 \text{ m.s}^{-2}$ .

### B.II.2. Cas général.

B.II.2.a. Expressions des énergies cinétique et potentielle et l'équation de la trajectoire.

L'énergie cinétique du pendule vaut par définition du moment d'inertie  $J_{I_0} E_c = \frac{1}{2}J_{I_0}\dot{\theta}^2$  soit

$$E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2.$$

Le poids est la seule force conservative (la tension de la tige ne travaille pas) donc l'énergie potentielle est telle que  $\vec{P} = -\text{grad}E_p$  soit dans le repère Oxy  $mg\vec{e}_x = -\frac{d}{dx}E_p\vec{e}_x$  soit

$$\int_{E_p}^{E_p} dE_p = -\int_{x_0}^x mg dx'. \text{ Avec } x = l \cos \theta \text{ et compte tenu des conventions choisies } E_p = 0 \text{ pour}$$

$$\theta = 0, \text{ on a } \int_0^{E_p} dE_p = -mg \int_1^{\cos \theta} dx' \text{ d'où } E_p = mgl(1 - \cos \theta).$$

L'énergie mécanique du système :  $E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta)$  peut s'écrire

$$\frac{2E_m}{mgl} = \frac{l}{g}\dot{\theta}^2 + 2(1 - \cos \theta). \text{ Avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \text{ on obtient l'expression demandée :}$$

$$y^2 + 2(1 - \cos \theta) = \frac{2E_m}{mgl}.$$

B.II.2.b. Interprétation du portrait de phase de cette équation donnée à la Figure 7 ci-dessous.

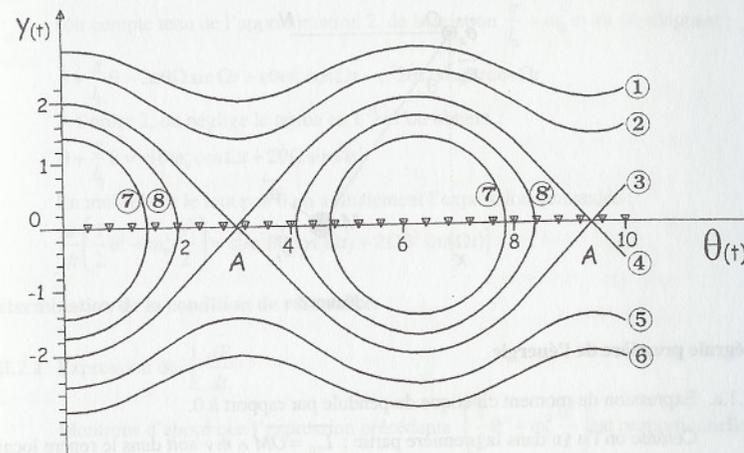


Figure 7

• Les trajectoires de phase correspondant à  $E_m < 2mgl$  sont celles telles que l'énergie mécanique initiale est inférieure à celle pour faire juste un tour complet soit par exemple avec  $E_p(\pi) = 2mgl$ ,  $E_c(\pi) = 0$ . La condition  $E_m \ll 2mgl$  suppose des petites oscillations.

L'équation des portraits de phase peut s'écrire à l'ordre le plus pas  $y^2 + x^2 = \frac{E_m}{2mgl}$ . C'est

l'équation d'un cercle de rayon  $\sqrt{\frac{E_m}{2mgl}}$  c'est donc la courbe 7 (modulo  $2\pi$ ) donc 7' aussi.

Rem : Les trajectoires 8 et 8' correspondent aussi à des oscillations, mais dans le cas où  $E_m < 2mgl$ . Dans ces conditions d'oscillation non isochrone, la période dépend de l'énergie mécanique initiale. L'oscillateur devient anharmonique. Les trajectoires de phase sont fermées, ce qui traduit l'absence de phénomène dissipatif, mais ne sont plus des cercles.

• Les points A de la figure appartenant aux courbes 3 et 4 correspondent à des mouvements de révolutions autour de O. C'est-à-dire que l'énergie mécanique est tel que  $E_m \geq 2mgl$ . Le point A correspond à l'annulation de  $y$ . En ce point, la vitesse angulaire s'annule. On est donc dans le cas où  $E_m = 2mgl$  : l'oscillateur à juste l'énergie mécanique nécessaire pour faire un tour sans vitesse au point  $\theta = \pm\pi$ . On reste sur la courbe 3. L'existence de ce point A de rebroussement ou de discontinuité traduit simplement l'instabilité de cette position d'équilibre.

a. Comme nous l'avons vu à l'une des questions précédentes, les courbes 7, 7', 8 et 8' correspondent à des mouvements oscillatoires

b. Les mouvements de révolution débutent avec les courbes 3 passages à 4 soit pour  $E_m \approx 2mgl$  et 1, 2 (pour des vitesses positives) et 5, 6 pour les vitesses négatives soit  $E_m > 2mgl$ .

**B.III.La résonance paramétrique.**

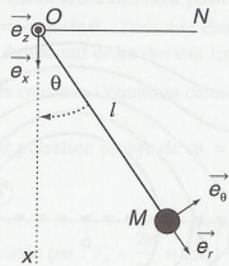


Figure 8

**B.III.1. Intégrale première de l'énergie**

B.III.1.a. Expression du moment cinétique du pendule par rapport à O.

Comme on l'a vu dans la première partie :  $\vec{L}_{iO} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$  soit dans le repère local  $\vec{L}_{iO} = l\vec{e}_r \wedge ml\dot{\theta}\vec{e}_\theta$  soit  $\vec{L}_{iO} = ml(t)^2 \dot{\theta}\vec{e}_z$

B.III.1.b. L'équation différentielle du mouvement.

La somme des moments des forces extérieures  $l\vec{e}_r \wedge P\vec{e}_x + l\vec{e}_r \wedge (-T(t))\vec{e}_r$  se réduit à  $-mgl\sin\theta \vec{e}_z$ . Par application du théorème du moment cinétique en O fixe :

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{iO} = \sum \vec{OM} \wedge \vec{F}_{ext} \text{ le mouvement est toujours plan, et } \frac{dL_{iO}}{dt} = m.l^2\ddot{\theta} \vec{e}_z + 2l.l.m.\dot{\theta}\vec{e}_z. \text{ Il}$$

vient alors  $\ddot{\theta} + 2\frac{\dot{l}(t)}{l(t)}\dot{\theta} + \frac{g}{l(t)}\sin\theta = 0$ . On, reconnaît là une équation différentielle dont un des coefficient dépend explicitement du temps. Elle est du type  $\ddot{\theta} + 2\alpha\dot{\theta} + \omega_0^2(t)\sin\theta = 0$  celle d'un oscillateur paramétrique.

B.III.1.c. Équation différentielle.

En fait en dérivant le premier terme, on constate qu'il s'agit de rechercher une expression de la forme  $\ddot{\theta}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta\dot{\theta}$ . Qui n'est rien d'autre que l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique classique multiplié par  $\dot{\theta}$ .

Faisons apparaître les termes de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique dans l'équation différentielle de l'encensoir moyennant des conditions d'approximation.

Avec  $l(t) = l_0(1 + \epsilon \cos(\Omega t))$ ,  $\dot{l} = -l_0\epsilon\Omega \sin(\Omega t)$  et  $\ddot{\theta} + 2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$  on obtient

$$\ddot{\theta} - 2\frac{l_0\epsilon\Omega \sin \Omega t}{l_0(1 + \epsilon \cos \Omega t)} \dot{\theta} + \frac{g}{l_0(1 + \epsilon \cos \Omega t)} \sin \theta = 0$$

Approximation 1 : à l'ordre 2 en  $\epsilon$  ( $\epsilon \ll 1$ ) on a :  $\frac{g}{l_0(1 + \epsilon \cos \Omega t)} \approx \frac{g}{l_0}(1 - \epsilon \cos \Omega t)$

Approximation 2 : à l'ordre 2 en  $\theta$  (pour les petites oscillations) :  $\sin\theta \approx \theta$

Le modèle proposé ne sera donc valable que pour de petites oscillations de l'encensoir.

Dans les conditions de l'approximation 1, l'équation différentielle s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l_0}(1 - \epsilon \cos \Omega t) \sin \theta = 2\epsilon\Omega \sin \Omega t (1 - \epsilon \cos \Omega t) \dot{\theta}$$

$$\text{ou } \ddot{\theta} + \frac{g}{l_0} \sin \theta = 2\epsilon\Omega \sin \Omega t (1 - \epsilon \cos \Omega t) \dot{\theta} + \epsilon \frac{g}{l_0} \sin \theta \cos \Omega t$$

soit compte tenu de l'approximation 2, de la relation  $\frac{g}{l_0} = \omega_0^2$  et en développant :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l_0} \theta = 2\epsilon\dot{\theta}\Omega \sin \Omega t + \epsilon\theta\omega_0^2 \cos \Omega t - \epsilon^2 2\dot{\theta}\Omega \sin \Omega t \cos \Omega t$$

À l'ordre 2, on néglige le terme en  $\epsilon^2$  et l'on obtient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l_0} \theta = \epsilon(\theta\omega_0^2 \cos \Omega t + 2\dot{\theta}\Omega \sin \Omega t)$$

En multipliant le tout par  $\dot{\theta}$  on a finalement l'expression demandée :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \frac{\theta^2}{2} \right) = \epsilon [\omega_0^2 \theta \dot{\theta} \cos(\Omega t) + 2\Omega \dot{\theta}^2 \sin(\Omega t)]$$

**B.III.2. Détermination de la condition de résonance.**

B.III.2.a. Expression de  $\frac{1}{E} \frac{dE}{dt}$

Montrons d'abord que l'expression précédente  $\left( \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \frac{\theta^2}{2} \right)$  est proportionnelle à  $A^2$ . Si

c'est le cas cela signifie que l'expression dérivée n'est rien autre que l'énergie mécanique à une constante multiplicative près comme on le suppose dans l'énoncé.

On a  $\theta = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$  et  $\dot{\theta} = -\dot{A} \sin(\omega_0 t + \varphi) - A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$  mais compte tenu de

l'approximation  $\dot{A} \ll \frac{\omega_0 A}{2\pi}$ ,  $\dot{\theta}$  s'écrit  $\dot{\theta} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ .

$$\text{Alors } \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2} A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{Soit } \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2} A^2 \omega_0^2.$$

Mais on nous dit dans l'énoncé que  $E \propto A^2$  donc pour s'approcher de l'expression demandée on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \frac{\theta^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \omega_0^2 \frac{d}{dt} (A^2)$$

puis par identification avec l'expression de la première partie :

$$\frac{1}{2} \omega_0^2 \frac{d}{dt} (A^2) = \epsilon [\omega_0^2 \theta \dot{\theta} \cos(\Omega t) + 2\Omega \dot{\theta}^2 \sin(\Omega t)]$$

soit en remplaçant  $\theta$  et  $\dot{\theta}$  par leur expression

$$\frac{1}{2} \omega_0^2 \frac{d}{dt} (A^2) = \epsilon [-\omega_0^3 A^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \varphi) \cos(\Omega t) + 2A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \sin(\Omega t)]$$

$$\frac{1}{2} \omega_0^2 \frac{d}{dt} (A^2) = A^2 \omega_0^2 \epsilon [-\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \varphi) \cos(\Omega t) + 2\Omega \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \sin(\Omega t)] \text{ mais :}$$

$$\cos(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t + 2\varphi) \text{ et } 2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) = 1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$$

et l'équation devient :

$$A^2 \omega_0^2 \epsilon \left[ -\omega_0 \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t + 2\varphi) \cos(\Omega t) + \Omega [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)] \sin(\Omega t) \right]$$

mais :

$$\sin(\Omega t) \cos(2\omega_0 t + 2\varphi) = \frac{1}{2} [\sin(\Omega t + 2\omega_0 t + 2\varphi) + \sin(\Omega t - 2\omega_0 t - 2\varphi)]$$

$$\sin(2\omega_0 t + 2\varphi) \cos(\Omega t) = \frac{1}{2} [\sin(2\omega_0 t + 2\varphi + \Omega t) + \sin(2\omega_0 t + 2\varphi - \Omega t)]$$

et l'équation devient :

$$A^2 \omega_0^2 \varepsilon \left[ 2\Omega \sin(\Omega t) - \frac{\omega_0}{2} \frac{1}{2} [\sin(2\omega_0 t + 2\varphi + \Omega t) + \sin(2\omega_0 t + 2\varphi - \Omega t)] \right]$$

$$- \frac{\Omega}{2} [\sin(\Omega t + 2\omega_0 t + 2\varphi) + \sin(\Omega t - 2\omega_0 t - 2\varphi)]$$

soit après regroupement :

$$A^2 \omega_0^2 \varepsilon \left[ 2\Omega \sin(\Omega t) - \frac{\omega_0}{2} \frac{1}{2} [\sin((2\omega_0 + \Omega)t + 2\varphi) + \sin((2\omega_0 - \Omega)t + 2\varphi)] \right]$$

$$- \frac{\Omega}{2} [\sin((2\omega_0 + \Omega)t + 2\varphi) - \sin((2\omega_0 - \Omega)t + 2\varphi)]$$

et après mise en facteur :

$$\frac{1}{2} A^2 \omega_0^2 \varepsilon \left[ 2\Omega \sin(\Omega t) - \left( \frac{\omega_0}{2} + \Omega \right) [\sin((2\omega_0 + \Omega)t + 2\varphi)] - \left( \frac{\omega_0}{2} - \Omega \right) [\sin((2\omega_0 - \Omega)t + 2\varphi)] \right] \text{ Si}$$

l'on admet la proportionnalité de E avec  $A^2$  (ce que nous suggère l'énoncé) alors :

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \varepsilon \left[ 2\Omega \sin(\Omega t) - \left( \frac{\omega_0}{2} + \Omega \right) \sin((2\omega_0 + \Omega)t + 2\varphi) - \left( \frac{\omega_0}{2} - \Omega \right) \sin((2\omega_0 - \Omega)t + 2\varphi) \right]$$

B.III.2.b. Moyenne de  $\frac{1}{E} \frac{dE}{dt}$ .

a.  $\Omega$  différent de  $2\omega_0$  ;

Si  $\Omega \neq \omega_0$  et compte tenu de  $\langle \sin(a.t + b) \rangle_t = 0 \quad \forall a, \forall b$  on a  $\left\langle \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} \right\rangle_t = 0$ , c'est-à-dire qu'en

moyenne l'accroissement relatif de l'énergie mécanique est nulle. On reste dans le cas d'un oscillateur à énergie constante.

b.  $\Omega$  égal à  $2\omega_0$ . L'énergie croît exponentiellement.

Si  $\Omega = 2\omega_0$  l'expression de  $\frac{1}{E} \frac{dE}{dt}$  devient  $\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \varepsilon \left[ 2\Omega \sin(\Omega t) - \frac{3\omega_0}{2} \sin(4\omega_0 t + 2\varphi) \right]$  et

compte tenu que  $\langle \sin(a.t) \rangle_t = 0$  et  $\langle \sin(4\omega_0 t + 2\varphi) \rangle_t = \sin(2\varphi)$  on a :

$$\left\langle \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} \right\rangle_t = \varepsilon \left( \frac{3\omega_0}{2} \sin(2\varphi) \right) \text{ soit } \left\langle \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} \right\rangle_t = \alpha \text{ et en première approximation, l'équation}$$

différentielle de l'énergie moyenne  $\frac{d\langle E \rangle}{dt} = \alpha \langle E \rangle$  dont la solution est tel que  $\langle E \rangle \propto e^{\alpha t}$

C'est le phénomène de résonance paramétrique.

## C À PROPOS DU LASER

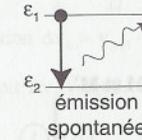
### C.I. Étude de l'amplificateur.

#### C.I.1. Les trois types de transitions possibles

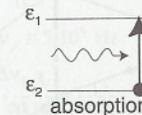
L'émission stimulée consiste dans le renforcement cohérent d'une onde de fréquence  $\nu_{21}$  par la transition d'un atome d'un niveau  $\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_1$ . Elle est donc provoquée par l'arrivée d'un photon, de même énergie que celle susceptible d'être libéré par l'atome retombant au niveau d'énergie inférieur c'est-à-dire  $h\nu_{21} = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ . Le photon induit aura non seulement la même fréquence mais aussi la même quantité de mouvement, la même polarisation ainsi que la même phase que le photon inducteur.

Rappelons les trois types de transitions :

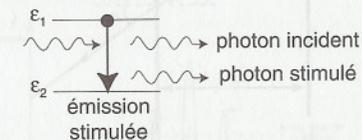
- $\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_1$  : l'émission spontanée : influencée par les collisions entre atomes et donc fortement aléatoire. L'émission spontanée est statistiquement isotrope sans relation avec un rayonnement incident



- $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2$  : absorption induite : l'onde électromagnétique de fréquence  $\nu_{21} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h}$  s'amortit en cédant de l'énergie aux atomes du milieu.



- $\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_1$  : émission induite ou stimulée : l'onde excite l'atome qui en se désexcitant émet un rayonnement de fréquence  $\nu_{21} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h}$ .



### C.I.2. Loi de Boltzmann : $N = N_0 \exp(-\varepsilon / kT)$ .

C.I.2.a. Expression du rapport  $N_2/N_1$  des populations d'atomes.

L'expression  $N_i = N_0 \exp\left(\frac{-\varepsilon_i}{kT}\right)$  donne la population  $N_i$  d'atomes occupant le niveau

d'énergie atomique  $\varepsilon_i$  pour une température T, puis  $\frac{N_2}{N_1} = e^{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{kT}}$ .

C.I.2.b. Calcule du rapport  $N_2/N_1$  à la température  $T = 393$  K

$$A. N. : e^{\frac{1,96 \times 1,602 \cdot 10^{-19}}{1,381 \cdot 10^{-23} \times 393}} = 74,883 \cdot 10^{-27} \text{ soit } \frac{N_2}{N_1} = 74,8 \cdot 10^{-27}.$$

C.I.2.c. L'inversion de population.

Pour que l'amplification de la lumière ait lieu, il faut que dans le matériau, l'émission stimulée soit plus forte que l'absorption. Il faut donc qu'il ait inversion de population soit  $N_2 > N_1$ . Si on admet que  $\alpha = K(N_1 - N_2)$  avec  $K > 0$ , la condition  $N_2 > N_1$  implique que  $\alpha < 0$ . L'intensité lumineuse croît exponentiellement. Le milieu produit une amplification de l'intensité : on dit qu'il est actif. Différents systèmes de pompage permettent d'obtenir cette inversion de population sans laquelle l'émission stimulée ne pourrait avoir lieu.

### C.I.3. Transition radiative d'un laser hélium-néon.

On a par définition :  $\nu_0 = \nu_{12} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h}$  et  $c = \lambda_0 \nu_0$  soit  $\lambda_0 = \frac{hc}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}$ .

A. N. :  $\frac{1,96 \times 1,602 \cdot 10^{-19}}{6,626 \cdot 10^{-34}} = 473,87 \cdot 10^{12}$  soit  $\nu_0 \cong 474 \cdot 10^{12}$  Hz

Et  $\frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 299792458}{1,96 \times 1,602 \cdot 10^{-19}} = 632,63 \cdot 10^{-9}$  soit  $\lambda_0 \cong 633 \cdot 10^{-9}$  m.

C.II. Étude du résonateur

C.II.1. Réflexions successives sur les miroirs M et M'.

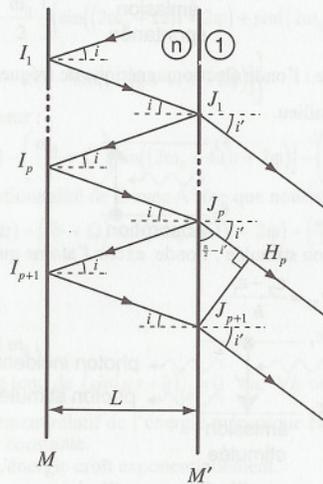


Figure 9

C.II.1.a. Soit  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide. Expression du retard de phase  $\Phi$   
On a représenté sur la figure deux ondes transmises parallèles qui interfèrent donc à l'infini.

La différence de marche vaut :  $\delta = [J_p I_{p+1} J_{p+1}] - [J_p H_p]$

soit compte tenu des indices de réfraction :  $\delta = 2n I_p J_p - J_p H_p$

Exprimons  $\delta$  en fonction des grandeurs intrinsèques. On a :  $L = I_p J_p \cos i$ , puis

$J_p H_p = J_p J_{p+1} \cos\left(i' + \frac{\pi}{2}\right) = J_p J_{p+1} \sin i'$ , et  $J_p J_{p+1} = 2L \tan i$

Soit  $\delta = 2n \frac{L}{\cos i} - 2L \tan i \sin i'$ . La loi de la réfraction  $\sin i' = n \sin i$  permet d'écrire

$\delta = 2n \frac{L}{\cos i} - 2nL \tan i \sin i$  soit  $\delta = 2nL \left( \frac{1}{\cos i} - \frac{\sin^2 i}{\cos i} \right)$  ou encore  $\delta = 2nL \cos i$ .

Le retard de phase correspondant est  $\Phi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$  soit  $\Phi = 4\pi n \frac{L}{\lambda} \cos i$ .

C.II.1.b. Les modes propres de la cavité.

Il y a interférence constructive lorsque  $\delta$  est un multiple  $p$  de la longueur d'onde  $\lambda_0$  ou encore  $\Phi = 2\pi \times p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ). Compte tenu de l'expression du retard de phase, cette condition se

réécrit en  $\lambda_p = \frac{1}{p} 2nL \cos i$ . On en tire les modes propres  $\nu_p = \frac{c}{\lambda} = p \frac{c}{2nL \cos i}$ .

Dans toute la suite du problème, on suppose l'angle d'incidence  $i$  nul et l'indice  $n$  du milieu

actif égal à l'unité.

C.II.2. Détermination des fréquences des modes propres  $\nu_p$  et de la distance spectrale  $\Delta \nu_L$

Avec les conditions proposées, on a  $\nu_p = \frac{c}{\lambda} = p \frac{c}{2L}$

La distance spectrale vaut par définition  $\Delta \nu_L = \nu_{p+1} - \nu_p$  soit  $\Delta \nu_L = \frac{c}{2L}$ .

A. N. :  $\frac{299792458}{2 \times 0,25} = 599,585 \cdot 10^6$  soit  $\Delta \nu_L = 0,60 \cdot 10^9$  Hz

C.II.3. Comparaison de  $\Delta \nu_p$ ,  $\Delta \nu_L$  et  $\Delta \nu_A$ .

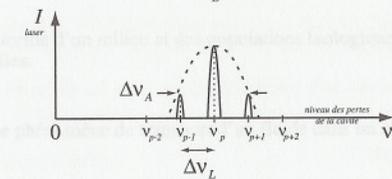
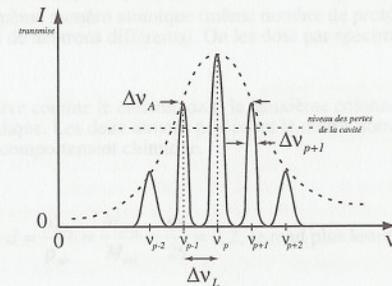
Par définition du facteur de qualité de la cavité, on a :  $\Delta \nu_p = \frac{\nu_p}{Q_p}$ .

A. N. :  $\frac{4,74 \cdot 10^{14}}{10^8} = 4,74 \cdot 10^6$  soit  $\Delta \nu_p \cong 5 \cdot 10^6$  Hz.

On observe donc que  $\Delta \nu_p < \Delta \nu_L < \Delta \nu_A$ .

L'écart entre les modes propres  $\Delta \nu_L$  est très supérieur à la largeur de raie laser centrée sur  $\nu_{p_j}$  les résonances seront bien séparées.

La bande passante de l'amplificateur étant supérieure à  $\Delta \nu_L$  et à  $\Delta \nu_{p_j}$ , on observera plus d'un mode propre.



C.III. Applications du LASER.

Applications	Médicales	Industrielles	Télécommunica tion	Laboratoire
Directivité	Cautérisation, microchirurgie, ophtalmologie	Découpe		
Cohérence		Téléométrie, qualité d'une surface, mesure de vitesse	Fibre optique CD-ROM etc...	Interférence holographie
Puissance		Découpe		

1. H. Maillet, *Le Laser - Principes et techniques d'application*. Technique et Documentation - Lavoisier, Ed. (PARIS, 1990).